Problemi di programmazione dinamica

Esercizio 1

Proporzionamento degli investimenti

Deve essere scelta la più opportuna politica d'investimento avendo a disposizione *3* diverse opportunità ognuna delle quali offre utili attesi non proporzionali alla somma investita.
Gli utili attesi per le possibili frazioni di capitale (multipli di *10* milioni) impegnate in ciascun investimento, con un capitale totale di *40* milioni, sono quelli indicati nella tabella seguente.

	10 milioni	*20 milioni*	*30 milioni*	*40 milioni*
investimento 1	*20*	*50*	*60*	*70*
investimento 2	*10*	*30*	*60*	*70*
investimento 3	*10*	*40*	*50*	*80*

Nel caso in cui non sia investita alcuna somma su una o più alternative, si suppone che da queste si ottenga ovviamente un utile nullo.

Formalmente l'obiettivo è quello di massimizzare la funzione non lineare:

$$\max z = f(x_1)+f(x_2)+ f(x_3)$$

in cui le variabili decisionali x_i rappresentano le somme investite sulle tre diverse alternative; la funzione è inoltre soggetta ai vincoli:

$x_1+x_2+x_3$ £ *40*
x_1 ³*0*, x_2 ³*0*, x_3 ³ *0*,

Per risolvere il problema è possibile costruire un modello basato sulla programmazione dinamica avendo la cura di individuare una serie di stadi decisionali per ognuno dei quali sia definibile un insieme finito di stati.
Un'efficace schematizzazione è quella in cui gli stadi decisionali sono determinati dalle successive allocazioni di capitale sulle tre alternative d'investimento e i relativi stati rappresentano invece le frazioni di capitale impegnate.
Tale approccio consente di descrivere l'utile atteso totale nella seguente forma recursiva che assumiamo come funzione obiettivo

$$f_n^*(s) = \max_{x_n}\left\{ f_n(s) + f_{n+1}^*(c-s)\right\}$$

dove la $f_n*(s)$ indica il valore ottimale della funzione obiettivo nello stato s dello stadio n, in cui s rappresenta il capitale che si investe nell'alternativa n; inoltre con c si indica il capitale totale disponibile (*40* milioni) e con $(c-s)$ si rappresenta il capitale ancora disponibile per l'investimento $(n+1)$.
Iniziando dall'ultimo stadio, si decide la quantità di capitale da investire nel terzo investimento; per far ciò sarebbe però necessario conoscere l'entità della frazione non ancora impegnata nel primo e nel

secondo investimento. Dato che tale frazione non è stata ancora determinata è necessario considerare tutte le possibilità (*0, 10, 20, 30, 40* milioni).
Per *40* milioni abbiamo:

$f_3^*(40) = max(f_3(0), f_3(10), f_3(20), f_3(30), f_3(40))=max(0,10,40,50,80)=80$

e così via per i rimanenti stati:

$f_3^*(30) = 50; f_3^*(20) = 40; f_3^*(10) = 10; f_3^*(0) = 0.$

A questo punto si procede alla valutazione dello stadio *2* per il quale sono noti gli utili ottenibili nello stadio 3, per l'investimento di *40* milioni si ottiene:

$$f_2^*(40) = \max\ (f_2(0)+f_3^*(40-0),f_2(10)+f_3^*(40-10),f_2(20)+ f_3^*(40-20),f_3(30)+f_3^*(40-30),f_2(40)+f_3^*(40-40))=$$

$$= \max\ (0+80,10+50,30+40,60+10,70+0) = 80, \text{ con } s=0$$

per le altre possibilità dello stadio si ottiene:

$f_2^*(30) = 60$, *con* $s=30$; $f_2^*(20) = 40$, *con* $s=0$;

$f_2^*(10) = 10$, *con* $s=10$; $f_2^*(0) = 0$, *con* $s=0$

Infine nello stadio *1* l'unico stato è quello di partenza nel quale è disponibile tutto il capitale di *40* milioni, per cui basta valutare:

$$f_1^*(40) = \max\ (f_1(0)+f_2^*(40-0),f_1(10)+f_2^*(40-10),f_1(20)+ f_2^*(40-20),f_1(30)+f_2^*(40-30),f_1(40)+f_2^*(40-40)) =$$

$$= \max(0+80,20+60,50+40,60+10,70+0) = 90, \text{ con } s=20$$

Il risultato che si ottiene è l'utile massimo conseguibile investendo i *40* milioni; la miglior politica può essere ricavata, con i dati ora a disposizione, nel modo di seguito descritto.
La prima decisione è quella che consente di ottenere il massimo utile totale e quindi è quella di investire *20* milioni sulla prima alternativa.
Sulla seconda alternativa non deve essere investita alcuna somma in quanto in questo stadio rimangono disponibili *20* milioni per il secondo e il terzo investimento e dal calcolo effettuato abbiamo che $f_2^*(20)=40$ si ottiene per $s=0$. Infine rimane determinato l'ammontare della somma sul terzo investimento che è pari ai rimanenti *20* milioni.

Esercizio 2

Gestione ottimale delle fluttuazioni della quantità di commesse

I costi di produzione di elementi di copertura prefabbricati per edifici industriali è funzione del numero di elementi prodotti in un mese (multipli di cento), tale funzione è riassunta nella tabella seguente per i volumi di produzione che vanno dal fermo di produzione al quale corrisponde un costo fisso per la gestione d'impresa fino alla massima produzione (*400* pezzi/mese) alla quale corrisponde il costo unitario minimo.

Unità prodotte	*0*	*100*	*200*	*300*	*400*
Costo (milioni)	*40*	*130*	*190*	*270*	*320*
Costo unitario		*1.30*	*0.95*	*0.90*	*0.80*

La ditta produttrice dei prefabbricati deve consegnare nei *4* mesi successivi a quello corrente rispettivamente *300* elementi, *200* elementi, *400* elementi e *200* elementi.
Gli elementi possono essere prodotti nell'esatta quantità richiesta oppure in numero maggiore alle necessità al fine di ridurne i costi.
La sovrapproduzione può essere immagazzinata con un costo di stoccaggio pari a *40* milioni al mese per ogni *100* elementi; la capacità massima di stoccaggio della ditta è limitata a *300* elementi.
Nell'ipotesi che le scorte finali siano nulle, al pari di quelle iniziali, determinare il piano di produzione ottimale per i prossimi quattro mesi.

Il problema può essere agevolmente risolto costruendone un modello basato sulla programmazione dinamica in cui gli stadi decisionali sono ovviamente i quattro mesi di produzione mentre gli stati sono rappresentati dai cinque possibili livelli di produzione (*0, 100, 200, 300, 400*).
I vincoli del problema sono la limitazione degli stoccaggi a *300* unità e l'assenza di scorte alla fine del periodo considerato.
La funzione dei costi di produzione ha per lo stadio j la seguente forma:

$$f^*_j(x,s)=\min_x \{ f_j(x)+S_j(s)+ f^*_{j+1}(s+x-D_j) \}$$

dove x è la variabile di decisione che identifica il volume di produzione, la variabile di stato s denota l'entità della scorta, $S_j(s)$ rappresenta il costo di stoccaggio nello stadio j-esimo funzione dell'entità della scorta, D_j è infine l'entità della domanda sempre nello stadio j.

Il vincolo di non avere scorte finali impone nel quarto mese di produrre solo quella quantità di prodotto che consente di soddisfare la parte di domanda che eccede le scorte.
La domanda nel quarto mese è di *200* elementi, per cui non si prende in considerazione il caso in cui la scorta all'inizio di questo periodo sia pari a *300* elementi.
Per le scorte di *200, 100, 0* elementi si ottiene per il quarto mese:

$f_4(200) = f_4(0)+S_4(200) = 40+40 \times 2 = 120$ con $x=200$

$f_4(100) = f_4(100)+S_4(100) = 130+40 \times 1= 170$ con $x=100$

$f_4(0) = f_4(0)+S_4(200) = 190+40 \times 0= 190$ con $x=0$

Nel terzo mese la domanda è di *400* elementi; le scorte che saranno lasciate per il periodo successivo sono (s+x-D), per tale quantità devono valere le relazioni:

$$0 \le s+x-D \le 200$$

la variabile decisionale x che denota il volume di produzione può cioè assumere valori diversi in funzione del livello di scorte con cui il terzo periodo si avvia.
Per $s=300$ si ottiene:

$$x \ge 100\ ,\ x \le 300$$

per cui:

$$f_3^*(300) = 40\times3+min(f_3(100)+f_4^*(300+100-400),f_3(200)+ f_4^*(300+200-400),f_3(300)+f_4^*(300+300-400))=$$

$$=120+min(130+190,190+170,270+120) = 440, \text{ con } x=100$$

Per $s=200$ si ottiene:

$$x \ge 200\ ,\ x \le 400$$

$$f_3^*(200) = 40\times2+min(f_3(200)+f_4^*(200+200-400),f_3(300)+ f_4^*(200+300-400),f_3(400)+f_4^*(200+400-400))=$$

$$=80+min(190+190,270+170,320+120) = 460, \text{ con } x=200$$

Per $s=100$ si ottiene:

$$x \ge 300\ ,\ x \le 400$$

$$f_3^*(100) = 40\times1+min(f_3(300)+f_4^*(100+300-400),f_3(400)+ f_4^*(100+400-400))=$$

$$=40+min(270+190,320+170) = 500, \text{ con } x=300$$

Per $s=0$ si ottiene:

$$x \ge 400\ ,\ x \le 400$$

$$f_3^*(0) = 40\times0+min(f_3(400)+f_4^*(0+400-400))=$$

$$= 0+min(320+190) = 510, con\ x=400$$

Nel secondo mese la domanda è di *200* elementi; per le scorte accantonate per il periodo successivo devono valere le relazioni:

$$0 \le s+x-D \le 300$$

la variabile decisionale x che denota il volume di produzione può cioè assumere valori diversi in funzione del livello di scorte con cui il terzo periodo si avvia.
Per $s=300$ si ottiene:

$$x \ge 0\ ,\ x \le 200$$

per cui:

$$f_2^*(300) = 40\times3+min(f_2(0)+f_3^*(300+0-200),f_2(100)+ f_3^*(300+100-200),f_2(200)+f_3^*(300+200-200))=$$

$=120+min(40+500,130+460,190+440) = 660$, con $x=0$

Per $s=200$ si ottiene:

x ³ 0 , x £ 300

per cui:

$f_2^*(200) = 40 \times 2+min(f_2(0)+f_3^*(200+0-200),f_2(100)+$
$f_3^*(200+100-200),f_2(200)+f_3^*(200+200-200),$
$f_2(300)+f_3^*(200+300-200))=$

$=80+min(40+510,130+500,190+460,270+440) = 630$,con $x=0$

Per $s=100$ si ottiene:

x ³ 100 , x £ 400

per cui:

$f_2^*(100) = 40 \times 1+min(f_2(100)+f_3^*(100+100-200),f_2(200)+$
$f_3^*(100+200-200),f_2(300)+f_3^*(100+300-200),$
$f_2(400)+f_3^*(100+400-200))=$

$=40+min(130+510,190+500,270+460,320+440)=680$,
con $x=100$

Per $s=0$ si ottiene:

x ³ 200 , x £ 400

per cui:

$f_2^*(0) = 40 \times 0+min(f_2(200)+f_3^*(0+200-200),f_2(300)+$
$f_3^*(0+300-200),f_2(400)+f_3^*(0+400-200))=$

$= 0+min(190+510,270+500,320+460) = 700$, con $x=200$

Nel primo mese la domanda è di *300* elementi; visto che le scorte iniziali sono state supposte nulle sarà $s=0$; inoltre deve valere la relazione che vincola le scorte lasciate per il secondo mese e quella che assicura che la domanda venga soddisfatta:

0 £ $x-D$ £ 300 , x³$300$

per cui abbiamo:

x ³ 300 , x£400

Il volume di produzione può quindi assumere due soli valori, per cui:

$f_1^*(0) = 40 \times 0+ min(f_1(300)+f_2^*(0+300-300),f_2(400)+f_3^*(0+400-300))=$

$=0+min(270+700,320+680) = 970$, con $x=300$

I dati ricavati consentono a questo punto di dedurre la politica ottimale che, come l'ultimo passo del calcolo mostra, deve condurre all'ottenimento del costo di produzione di *970* milioni per i *1100* elementi prefabbricati di copertura per un costo medio unitario pari a circa £ *882.000* per ogni elemento.
Sempre dall'ultimo passo del calcolo si deduce che la prima decisione è quella di produrre *300* elementi

nel primo mese; tale quantità è pari alla domanda per cui si passa al secondo mese senza alcuna scorta.
La politica ottimale è quindi quella che, nel secondo stadio, passa per lo stato s=2; la $f_2^*(0)$ si ottiene per il valore della produzione pari a *200* elementi che è quindi la produzione ottimale per il secondo mese. Anche in questo caso il volume di produzione è esattamente quello necessario per soddisfare la domanda del periodo.
Dalla valutazione della $f_3^*(0)$ si deduce che nel terzo mese partendo da una scorta nulla la produzione ottimale è di *400* elementi, ancora pari alla domanda di prodotto nel periodo.
Infine con procedimento iterativo si evince un analogo risultato per il quarto mese nel quale la produzione ottimale, ricavata dalla $f_4^*(0)$ è di *200* elementi.
In sintesi i dati del problema fanno si che non sia in alcun periodo conveniente ricercare una maggiore economia di scala a causa degli elevati costi di immagazzinamento dovuti in maggior parte al conseguente immobilizzo finanziario.
Questo è un tipico esempio numerico di ottimalità economica della produzione effettuata il più tardi possibile rispetto alle necessità; questo principio è alla base della cosiddetta produzione *Just In Time* (*JIT*).

Esercizio 3

Politica ottimale di sostituzione di un'attrezzatura

Un'impresa di '*movimenti terra*' possiede attualmente un escavatore che ha acquistato due anni prima.
All'impresa è noto che l'efficienza degli escavatori varia con l'età della macchina a causa del crescente numero di difetti che in essa si manifestano durante l'utilizzo; contemporaneamente crescono con l'età i costi manutentivi secondo quanto riportato nella tabella seguente

Età anni	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Efficienza (%)	*100*	*95*	*90*	*85*	*70*	*55*
Manutenzione mil.	*3*	*10*	*12*	*16*	*22*	*30*

Il deperimento della macchina diviene insostenibile oltre i 5 anni di utilizzo per cui l'impresa adotta la politica di non tenere mai macchine oltre tale limite di età.
Nel caso di acquisto di un nuovo escavatore, il cui costo è di *120* milioni, la valutazione dell'usato è, in funzione dell'età, quella riassunta nella tabella seguente

Età ®	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Valutazione mil.	*80*	*60*	*50*	*35*	*20*

Nell'ipotesi che l'utile che l'impresa può ottenere con l'escavatore in piena efficienza sia pari a *100* milioni, si pone il problema di determinare una politica di sostituzione che massimizzi il profitto totale ottenibile nei prossimi *4* anni dopo i quali l'impresa intende cessare l'attività.

Questo problema può essere schematizzato come un processo decisionale a *4* stadi corrispondenti agli anni per i quali deve essere pianificata la politica di sostituzione dell'attrezzatura. In ogni stadio sono individuati *5* stati corrispondenti alle possibili età *s* della macchina all'inizio dello stadio. È facile rendersi conto dalle caratteristiche del problema che esso può essere convenientemente formalizzato in termini di programmazione dinamica.
Nei diversi stadi, la variabile decisionale *x* può assumere soltanto due valori: '*sostituire*' acquistando un nuovo escavatore o '*mantenere*' quello già in uso.
Se nel generico anno *j* l'impresa decide di mantenere l'escavatore in uso da *s* anni dovrà sostenere un costo di manutenzione pari a *M(s)* ricavabile dalla tabella data ed avrà un utile lordo *R(s)* proporzionale all'efficienza tabellata della macchina:

$$R(s) = Efficienza(s) \times 100 \text{ mil.}$$

L'utile netto per il solo periodo *j* è quindi in questo caso pari a:

$$R(s)-M(s)$$

per cui considerando che si entra nello stadio successivo con una macchina di (*s+1*) anni, l'utile netto complessivo fino al quarto anno sarà:

$$U_j(s) = R(s)\text{-}M(s)+U_{j+1}(s+1)$$

Se l'impresa, sempre nel periodo *j*, decide invece di acquistare un nuovo escavatore, deve sostenere un costo di sostituzione *S* pari alla differenza tra il costo *C* del nuovo escavatore e la valutazione *V(s)* dell'usato tabellata sopra:

$$S(s) = C\text{-}V(s)$$

L'utile lordo è in questo caso quello massimo ottenibile da una macchina nuova pienamente efficiente *R(0)=100 milioni*.
L'utile netto per il solo periodo *j* è allora in questo caso:

$$R(0)\text{-}M(0)\text{-}S(s)$$

Considerando che nel periodo successivo la macchina avrà un anno di vita, l'utile netto complessivo fino al quarto anno sarà:

$$U_j(s) = R(0)\text{-}M(0)\text{-}S(s)+U_{j+1}(1)$$

Possiamo quindi scrivere l'utile ottenibile a partire dallo stato *s* dello stadio *j* come:

$$U^*_j=max\{R(s)\text{-}M(s)+U_{j+1}(s+1) , R(0)\text{-}M(0)\text{-}S(s)+U_{j+1}(1)\}$$

Tenendo conto che per l'età della macchina si considera quella all'inizio degli stadi mentre per denotare lo stadio si considera l'anno di chiusura deve essere posto il vincolo:

s ¹ j

Inoltre considerando che si parte con un escavatore di *2* anni d'età dobbiamo imporre anche il vincolo:

s £ j+1

che consente di eliminare gli stati non possibili in cui la macchina sarebbe più vecchia di un anno rispetto allo stadio corrente (ex. stadio iniziale *j=1* escavatore *s=2=1+1*).
Per la risoluzione seguiamo l'approccio tipico della programmazione dinamica iniziando dall'ultimo stadio e calcoliamo, attraverso la formula recursiva, l'utile netto ottimale per i cinque possibili stati (corrispondenti alle cinque età possibili che l'escavatore può avere il quarto anno) e le decisioni da prendere per ottenerlo.
Nell'ultimo stadio è necessario porre per il calcolo che l'utile dello stadio successivo sia pari alla sola valutazione dell'escavatore usato:

$U_4^*(5) =$ $max\{R(5)\text{-}M(5)+V(5) , R(0)\text{-}M(0)\text{-}S(5) +V(1)\} =$

$max\{55\text{-}30+20 ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}20) +80\}=77$ con *x='sostituire'*

Lo stato *s=4* non può essere assunto in quanto si avrebbe *s=j*; per i rimanenti stati si ottiene:

$U_4^*(3)= max\{85\text{-}16+50 ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}50) +80\}=119$ con *x='mantenere'*

$U_4^*(2)= max\{90\text{-}12+60 ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}60) +80\}=138$ con *x='mantenere'*

$U_4^*(1)= max\{95\text{-}10+80 ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}80)+80\}=165$ *con x='mantenere'*

Passando ora al terzo anno non prenderemo in considerazione gli stati *s=3,5* in quanto questi non soddisfano i vincoli:

$U_3^*(4)= max\{70\text{-}22+77 ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}35)+165\}=177$ *con x='sostituire'*

$U_3^*(2)$= $max\{90\text{-}12+119\ ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}60)+165\}=202$ *con x='sostituire'*

$U_3^*(1)$= $max\{95\text{-}10+138\ ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}80)+165\}=223$
con x='mantenere'

Nel secondo anno saranno considerati i soli stati *1,3* in quanto sono gli unici che soddisfano i vincoli del problema:

$U_2^*(3)$= $max\{85\text{-}16+177\ ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}50)+223\}=250$ *con x='sostituire'*

$U_2^*(1)$= $max\{95\text{-}10+202\ ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}80)+223\}=287$
con x='mantenere'

Infine per il primo stadio deve essere considerato il solo stato $s=2$ in quanto il problema specifica che la ditta già possiede all'inizio un escavatore di due anni:

$U_1^*(2)$= $max\{90\text{-}12+250\ ,100\text{-}3\text{-}(120\text{-}60)+287\}=328$
con x='mantenere'

La politica ottimale si ricava risalendo le decisioni che portano all'utile ottimale che è pari a *328* milioni.
All'inizio (primo stadio) l'impresa deve tenere la macchina usata, questa decisione conduce nel secondo anno ad avere una macchina di tre anni, a questo stato corrisponde la decisione ottimale di sostituzione.
Nel terzo anno l'impresa riparte con una macchina di un anno (sostituita all'inizio del secondo anno) per cui si riparte dallo stato $s=1$; a questo corrisponde la decisione ottimale di mantenere l'attrezzatura in possesso.
Nell'ultimo anno allo stato $s=2$ corrisponde ancora la decisione ottimale di tenere l'attrezzatura per poterla rendere come usato alla chiusura dell'attività.
Nella figura 2.5 è schematizzata la politica decisionale descritta.

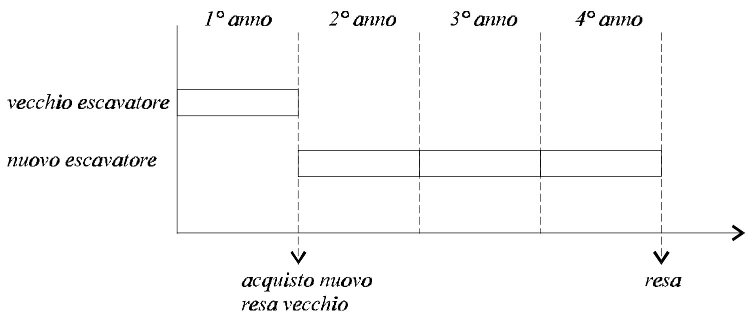

Fig. 2.5 *Politica ottimale di sostituzione dell'escavatore*

E' possibile risolvere lo stesso problema considerando il valore attuale dell'utile ad esempio nel caso in cui il tasso di sconto sia pari al *12%*.
Il valore attuale dell'utile nel generico stato *s* dello stadio *j* può essere calcolato scontando il valore dell'utile dello stadio $j+1$; dato che ad ogni stadio corrisponde un periodo di un anno è possibile utilizzare lo schema di sconto razionale[1] per cui il valore attuale *PV* del capitale futuro *C* è con un tasso di sconto *i*:

$$PV = \frac{C}{1 + i \cdot t}$$

La formula recursiva assume in questo caso la forma:

$$U^*_j = max\{R(s)\text{-}M(s)+k \cdot U_{j+1}(s+1)\ ,\ R(0)\text{-}M(0)\text{-}S(s)+k \cdot U_{j+1}(1)\}$$

[1] vd. Elementi di analisi finanziaria

dove *k* rappresenta il fattore di sconto annuale ed è pari nel nostro caso a *1/1.2 @ 0.833*.

Iniziando ancora una volta dall'ultimo stadio calcoliamo, attraverso la formula recursiva, il valore attuale dell'utile netto ottimale per i cinque possibili stati.

$U_4^*(5) = max\{R(5)-M(5)+k \times V(5) , R(0)-M(0)-S(5) +k \times V(1)\} =$

$max\{55-30+20/1.12 ,100-3-(120-20)+80/1.12\}=68.43$
con *x='sostituire'*

Per il quarto stadio si ottiene:

$U_4^*(3) = max\{85-16+50/1.12 ,100-3-(120-50)+80/1.12\}=113.64$ con *x='mantenere'*

$U_4^*(2) = max\{90-12+60/1.12 ,100-3-(120-60) +80/1.12\}=131.57$ con *x='mantenere'*

$U_4^*(1) = max\{95-10+80/1.12 ,100-3-(120-80) +80/1.12\}=156.43$ con *x='mantenere'*

Per il terzo stadio si ottiene:

$U_3^*(4)= max\{70-22+68.43/1.12 ,100-3-(120-35)+156.43/1.12\}=151.67$ con *x='sostituire'*

$U_3^*(2)= max\{90-12+113.64/1.12,100-3-(120-60)+156.43/1.12\}=179.46$ con *x='mantenere'*

$U_3^*(1)= max\{95-10+131.57/1.12,100-3-(120-80)+156.43/1.12\}=202.47$
con x='mantenere'

Nel secondo stadio si ottiene:

$U_2^*(3)= max\{85-16+151.67/1.12,100-3-(120-50)+202.47/1.12\}=207.78$
con *x='sostituire'*

$U_2^*(1)= max\{95-10+179.46/1.12,100-3-(120-80)+202.47/1.12\}=245.23$ con *x='mantenere'*

Infine per il primo stadio si ottiene:

$U_1^*(2)= max\{90-12+207.78/1.12,100-3-(120-60)+245.23/1.12\}=263.52$ con *x= mantenere*

Come ci si poteva attendere l'utile ottimale è questa volta minore rispetto al caso in cui non veniva considerata l'attualizzazione ed è pari a *263.52* milioni; esso è comunque ottenuto con la medesima politica precedente.