Il problema decisionale nella gestione del processo produttivo

L'attività decisionale è il cuore del management della produzione; da essa dipende il coordinamento economico di tutte le risorse[1]. I più importanti momenti decisionali sono connessi alla gestione delle lavorazioni, alla gestione delle scorte e delle risorse, alla organizzazione del luogo di lavoro, alla programmazione logistica e così via. L'attività decisionale è sempre accompagnata da condizioni di incertezza; questa può riguardare molti degli aspetti influenti sulla decisione da prendere: costo dei materiali e della mano d'opera, costo dei finanziamenti, ritardi nelle forniture, condizioni meteorologiche, ecc..
La qualità della decisione è il risultato della quantità dei dati disponibili e della loro correttezza.
In questo paragrafo prenderemo in esame diversi criteri decisionali che si differenziano tra loro per il diverso approccio nei confronti del rischio. A tal fine considereremo un modello del problema decisionale in cui sono individuabili i seguenti cinque fondamentali elementi:

- *azioni o decisioni* alternative possibili;
- *eventi* che possono influenzare il risultato di una azione;
- *stima della probabilità* che i diversi eventi possano verificarsi;
- *effetti associati* alle diverse combinazioni di azioni ed eventi;
- *criterio di ordinamento* in termini di preferibilità degli effetti.

Le azioni, ognuna conseguenza di una determinata decisione, non sono necessariamente elementari; è necessario invece che siano mutuamente esclusive e dunque descrivibili attraverso una lista $[a_1,a_2,...,a_m]$.
In modo analogo gli eventi logicamente prevedibili devono essere organizzati in modo che solo uno di essi possa verificarsi; Anche gli eventi possono essere rappresentati attraverso una lista $[e_1,e_2,...,e_n]$. Le probabilità associate ai diversi eventi sono in generale dipendenti dalla decisione prescelta e ciò perchè una decisione può modificare, attraverso la conseguente azione, l'evoluzione del contesto. Indichiamo dunque con p_{ij} la probabilità che, una volta scelta l'azione a_i, l'evento e_j si verifichi.
La lista di eventi deve comprendere tutti quelli logicamente possibili in modo che, considerando anche la loro mutua esclusività sia possibile scrivere per ogni generica azione *i*-esima:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Gli effetti sono rappresentati quantitativamente attraverso una matrice ***U*** di dimensioni '$n \times m$' il cui elemento u_{ij} è la valutazione dell'effetto dell'azione *i*-esima nel caso in cui si avveri l'evento *j*-esimo[2].
Nel seguito parleremo genericamente di utilità per indicare tali termini.
L'incertezza degli eventi si ripercuote comunque sulle utilità, in modo tale da non rendere immediata la scelta dell'alternativa migliore. Risulta allora necessaria l'adozione di un criterio decisionale che consenta di ordinare le possibili azioni attraverso una valutazione strategica del rischio. Formalmente ciò equivale all'impiego di una funzione $q_i=f(u_{i1},u_{ik},...,u_{in})$ che associ ad ogni azione a_i un grado di preferenza rispetto alla strategia economica attuata dal responsabile della decisione. Tale funzione non è banale; ad esempio

[1] Una buona esposizione della rilevanza economica dell'attività decisionale nella produzione è data in ROSTIROLLA P., *Ottimo economico: processi di valutazione e di decisione*, Liguori, Napoli, 1992.
[2] Nel caso della valutazione della convenienza economica di un investimento tali grandezze sono come abbiamo già detto il periodo di recupero dell'investimento, il valore attuale netto, tasso di rendimento interno, ecc.

non necessariamente la composizione delle utilità è lineare. Un'alternativa che consenta cioè di ottenere con pari probabilità un utile di *300* o *100* milioni non è necessariamente equivalente ad un'alternativa che consenta di ottenere con certezza un utile di *200* milioni. La scelta tra la prima e la seconda opzione dipende come già detto dalla strategia economica generale attuata dal decisore; ad esempio una strategia più conservativa tenderà a spostare la scelta verso la seconda alternativa, mentre il contrario avviene qualora la scelta fosse guidata da una strategia più aggressiva.
La struttura del problema decisionale può essere rappresentata sinotticamente attraverso un albero come quello in figura 1.14 in cui sono individuate sia ramificazioni che descrivono alternative decisionali e sia ramificazioni che descrivono i possibili eventi futuri.

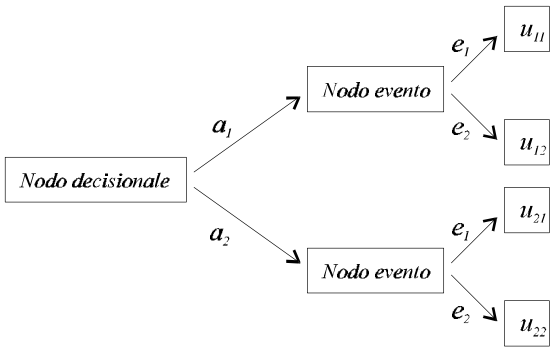

Fig. 1.14 *Rappresentazione di un problema decisionale come albero delle decisioni. La ramificazione in corrispondenza di un nodo decisionale rappresenta i possibili scenari conseguenti a decisioni diverse. Invece la ramificazione in corrispondenza di un nodo evento rappresenta i possibili scenari conseguenti all'accadere dei diversi eventi previsti. Le foglie dell'albero rappresentano l'utile ottenibile per le corrispondenti combinazioni di decisioni ed eventi.*

Spesso però la rappresentazione ad albero risulta poco compatta mentre è più comoda la seguente rappresentazione matriciale

	e_1	e_2
a_1	u_{11}	u_{12}
a_2	u_{21}	u_{22}

Nel tempo sono stati proposti molti criteri decisionali che riflettono diversi obiettivi e diversi approcci alla stima dell'incertezza[3]; è comunque possibile raggrupparli in due classi fondamentali:
- *criteri decisionali in condizioni di totale incertezza*;
- *criteri decisionali in presenza di informazioni* sulle probabilità associate agli eventi futuri.

La specificità delle due classi è legata all'origine dell'incertezza che nella primo caso è più dovuta alla scarsa conoscenza del contesto mentre nel secondo è più dovuta alla imprevedibilità dello stesso.
In entrambe le circostanze non prenderemo in considerazione il caso banale in cui una decisione conduca a una situazione che rispetto alle altre sia in ogni caso, per ogni possibile evento, più vantaggiosa.

[3] per una più estesa discussione dei criteri decisionali si può consultare COOK W.P., *Quantitative methods for management decisions*, McGraw Hill, New York, 1985, cap. 9; SALVENDY G. Ed., *Handbook of industrial engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1982, cap. 13.3; COLORNI A., *Ricerca operativa*, Clup, Milano, 1984, cap. 16.

Criteri decisionali in assenza di informazioni sulle probabilità degli eventi futuri

- *Criterio del MaxiMin utile*

E' uno dei più utilizzati principi in condizioni di totale incertezza; esso tende ad individuare la situazione che garantisce la migliore convenienza minima. In altri termini una volta stimati, per ogni azione gli estremi di convenienza in funzione degli eventi possibili, si sceglie quella che nel peggiore dei casi offre il migliore utile o la minore perdita.
Il *MaxiMin* è un criterio decisionale molto conservativo ed è adottato dunque nei casi in cui si ritenga prioritario il conseguimento di un utile anche non elevato ma evitando scelte che potrebbero condurre a situazioni di forte perdita.

- *Criterio del MiniMax rammarico*

Con riferimento ad una combinazione azione-evento a_i-e_j definiamo il rammarico r_{ij} come la differenza tra il più elevato utile che si otterrebbe col verificarsi dell'evento e_j qualora fosse scelta la decisione per questo evento più favorevole e l'utile u_{ij} ottenuto con l'azione a_i. Questo criterio orienta la scelta verso l'azione per la quale è minimo il massimo rammarico; in altre parole si sceglie l'azione che minimizza l'influenza degli eventi sui risultati ottenibili.
Anche questo è un principio conservativo in quanto con esso non viene ricercata la migliore convenienza quanto la azione che garantisce la maggiore stabilità di risultati.

- *Criterio di Hurwicz*

E' un principio che coinvolge il responsabile della decisione nella manifestazione di un proprio indice di ottimismo sulla favorevolezza degli eventi futuri.
Indichiamo con a tale indice che supponiamo compreso nell'intervallo [*0..1*]; associamo all'estremo inferiore l'espressione di totale pessimismo sugli eventi futuri mentre all'estremo superiore quella di totale ottimismo. Dopo aver valutato la convenienza u_{ij} di tutte le possibili combinazioni azione-evento, per ogni azione si moltiplica il risultato più conveniente per a e quello meno conveniente per $1-a$. La somma di questi due prodotti fornisce il cosiddetto *peso di Hurwicz* dell'utilità di una azione; tra tutte le alternative sarà quindi scelta quella che massimizza tale quantità.
Quando il grado di ottimismo è nullo questo criterio coincide con quello del *MaxMin* (in quanto viene annullato il peso degli eventi positivi); quando a è posto pari all'unità si ha un criterio di massima aggressività denominato *MaxiMax* che ricerca l'azione che consente in caso di positività degli eventi la massima convenienza possibile.
Valori intermedi del grado di ottimismo consento di collocarsi tra i due criteri.

- *Criterio di Laplace*

Con tale criterio si assume l'ipotesi che in mancanza di informazioni tutti gli eventi siano equamente probabili scegliendo l'azione che massimizza la convenienza attesa calcolata sull'insieme degli eventi possibili. Formalmente per l'azione a_i il valore atteso dell'utile si ottiene dalla:

$$m_i(u) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}$$

Questo criterio è l'unico che prende in considerazione per la decisione tutti i possibili risultati che possono verificarsi a seguito della scelta.

- *Un esempio di decisione in condizione di incertezza*

Per la realizzazione di un'opera, la gestione d'impresa ha individuato cinque diverse organizzazioni dei lavori che comportano diverse durate, utilizzazione di risorse e modalità di approvvigionamento dei materiali.
Contemporaneamente vengono individuati per il periodo della costruzione cinque probabili scenari che consentono nei diversi casi i seguenti utili in decine di milioni:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
a_1	10	8	6	4	5
a_2	6	6	7	6	7
a_3	7	7	6	7	5
a_4	8	6	6	7	5
a_5	6	5	8	9	6

Vediamo come sia possibile applicare i diversi criteri decisionali al fine di indirizzare la scelta verso una o l'altra delle possibili organizzazioni.
In primo luogo è possibile notare che il problema non è banale in quanto nessuna delle alternative è dominante sulle altre, nessuna cioè offre i migliori risultati per ogni eventualità.
Per utilizzare il criterio del *MaxiMin* è necessario per ognuna delle alternative selezionare il peggiore risultato

	u_{min}
a_1	4
a_2	6
a_3	5
a_4	5
a_5	5

Come si può vedere la seconda alternativa a_2 è quella che garantisce il migliore minimo rendimento ed è quindi quella prescelta secondo tale criterio.
Per utilizzare il criterio del *MiniMax rammarico* è invece necessario valutare il massimo rammarico per le diverse combinazioni a_i-e_j come mostrato nella tabella seguente

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	*Max. rammarico*
a_1	0	0	2	5	2	5
a_2	4	2	1	3	0	4
a_3	3	1	2	2	2	3
a_4	2	2	2	2	2	2

a_5	*4*	*3*	*0*	*0*	*1*	*4*

Come si può vedere la quarta alternativa a_4 è quella che, nel peggiore dei casi, offre il minore rammarico e quindi è quella scelta secondo questo criterio.
Il criterio di *Hurwicz* implica l'espressione del proprio grado di ottimismo. Se scegliamo ad esempio il valore $a=0.75$ possiamo calcolare le utilità pesate per le diverse azioni moltiplicando i migliori risultati di ognuna per *0.75* e i peggiori per *0.25* ottenendo così i valori di seguito mostrati

	Hurwicz $a=0.75$
a_1	*8.50*
a_2	*6.75*
a_3	*6.50*
a_4	*7.25*
a_5	*8.00*

Secondo il criterio di *Hurwicz* con un grado di ottimismo $a=0.75$ la prima alternativa a_1 è quella più favorevole; se l'ottimismo scendesse al valore $a=0.50$ la prima e la quinta alternativa diverrebbero equamente convenienti.
Il criterio di *Laplace* richiede infine di valutare il valore atteso dell'utilità offerto da ogni azione nell'ipotesi che gli eventi siano tutti equamente probabili; nel nostro caso si ottengono i valori seguenti

	Utile atteso
a_1	*6.60*
a_2	*6.40*
a_3	*6.40*
a_4	*6.40*
a_5	*6.80*

In questo caso il miglior risultato è offerto dalla quinta alternativa a_5.
Come si può notare, ogni criterio indirizza la scelta su una alternativa diversa; ciò riflette i diversi approcci al rischio che essi propongono. La scelta di un criterio o dell'altro dipende dunque dalla maggiore o minore volontà di ricercare elevate convenienze a scapito di un elevato rischio e ciò dipende a sua volta dallo condizione e dalla strategia generale del decisore.

Criteri decisionali con disponibilità di informazioni sulle probabilità degli eventi futuri

- *Criterio della massima utilità attesa*

È il criterio più utilizzato per la valutazione del rischio; esso tende ad individuare l'alternativa a_i che offre la migliore convenienza attesa definita come:

$$m_i(u) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} u_{ij}$$

Utilizzando questo criterio, si indirizza la scelta verso l'alternativa che darebbe il miglior utile qualora lo stesso problema decisionale si proponesse con le stesse condizioni un elevato numero di volte.
Esso però non tiene in considerazione la possibilità che ci sia una elevata dispersione intorno al valore atteso dell'utilità per cui nel caso della singola decisione il risultato potrebbe anche essere compreso in un intervallo molto ampio.

- *Criterio della minima varianza dell'utilità*

Questo principio tende a selezionare le alternative che risultano più stabili rispetto alla variabilità degli eventi e ciò a prescindere dal valore dell'utile atteso. Per far ciò viene valutata, per ogni alternativa, la varianza dell'utile rispetto ai possibili eventi futuri. Per l'azione *i*-esima la varianza dell'utile rispetto agli eventi è ricavata dalla formula:

$$s_i^2(u) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot (u_{ij} - m_i)^2$$

in cui m_i è l'utile atteso per l'azione *i*-esima. Sulla base di tale calcolo sarà scelta l'alternativa che offre la minore varianza. Come si può facilmente intuire questo criterio ha un senso solo nei casi in cui il valore atteso degli utili rimane pressoché costante per tutte le diverse alternative decisionali.

- *Criterio dell'utilità caratteristica*

Il principio della massimizzazione della convenienza attesa non prende in considerazione la stabilità dei risultati ottenibili con la scelta effettuata; viceversa il principio di minimizzazione della varianza non prende invece in considerazione l'entità assoluta dei risultati.
E' possibile combinare questi due principi in modo da tenere in considerazione sia il valore assoluto della utile attesa sia la sua tendenza ad allontanarsi da tale valore. Si possono valutare le alternative sulla base del valore assunto dalla differenza tra l'utile atteso e il prodotto tra deviazione standard (radice della varianza) e un parametro *k* arbitrario (di solito pari all'unità):

$$c_i(u) = m_i(u) - k s_i(u)$$

La quantità c_i così calcolata, denominata *utilità caratteristica*, individua l'utilità minima ottenibile rispetto ad un determinato livello di probabilità, livello gestito attraverso il parametro *k*[4].
L'alternativa scelta sarà quella che offre la migliore convenienza caratteristica.
Il principio della convenienza caratteristica pone l'implicita ipotesi che la distribuzione dell'utilità rispetto ai diversi eventi sia simmetrica intorno al valore atteso. In realtà ciò non è sempre verificato per cui il medesimo rischio verrebbe stimato per distribuzioni molto diverse come quelle mostrate in figura 1.15.

[4] Per una distribuzione di probabilità che approssima quella normale ed un valore *k=1* la convenienza così calcolata si verifica con una probabilità dell'*84,1%*.

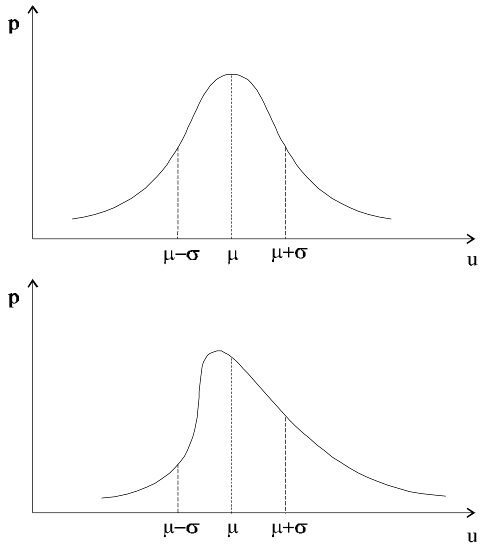

Fig. 1.15 *Distribuzioni di probabilità dell'utilità molto diverse possono avere valori della deviazione standard molto prossimi. Nel caso rappresentato in figura la distribuzione in basso pur avendo lo stesso valore di deviazione di quella in alto è preferibile in quanto, come si può capire osservando la minore entità della coda di sinistra, il valore caratteristico m-s è in questo caso superato con probabilità maggiore rispetto alla distribuzione in alto.*

Per ovviare a tali incongruenze è possibile valutare la varianza utilizzando solo i la parte della distribuzione al di sotto della media; tale valore è detto semivarianza:

$$s_i^2(u) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot (u_{ij} - m_i)^2 ; \left\langle u_{ij} \le m_i \right\rangle$$

- *Criterio della minima aspirazione*

Questo criterio è basato sul concetto di soddisfazione dell'aspettativa del decisore che è chiamato ad esprimere il minimo livello di utile a cui si aspira. Questo livello costituisce la soglia al di sotto della quale gli utili non saranno presi in considerazione nel calcolo del valore atteso, il più elevato dei quali distinguerà l'alternativa migliore.

- *Un esempio di decisione con valutazione del rischio*

Per la realizzazione della stessa opera dell'esempio precedente, la gestione d'impresa oltre a individuare cinque diverse organizzazioni dei lavori assume anche la stima della probabilità dei cinque possibili scenari futuri.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
p	*0.2*	*0.4*	*0.2*	*0.1*	*0.1*

Come si può valutare dalla tabella seguente, secondo il criterio dell'utile atteso la prima alternativa a_1 risulta quella più conveniente.

	Utile atteso
a_1	*7.30*
a_2	*6.30*
a_3	*6.60*
a_4	*6.40*
a_5	*6.30*

I valori della varianza riportanti nella tabella seguente conducono invece ad una scelta diversa. Si può infatti notare che la seconda alternativa a_2 risulta la più stabile ed è quindi quella prescelta utilizzando il criterio della minima varianza.

	Varianza
a_1	*3.61*
a_2	*0.21*
a_3	*0.44*
a_4	*0.84*
a_5	*2.01*

Calcolando invece l'utile caratteristico otteniamo i seguenti risultati.

	Utile caratteristico
a_1	*5.40*
a_2	*5.84*
a_3	*5.94*
a_4	*5.48*
a_5	*4.88*

Si vede che in questo caso l'alternativa migliore risulta essere la a_3.
Tenendo invece conto della asimmetria delle distribuzioni di rendimento si ottengono i risultati seguenti:

	Semivarianza	*Utile caratteristico*
a_1	*1.96*	*5.90*
a_2	*0.062*	*6.05*
a_3	*0.32*	*6.03*
a_4	*0.29*	*5.86*
a_5	*2.02*	*5.46*

In questo caso l'alternativa a_2 diventa quella più favorevole.
Infine calcoliamo gli utili attesi secondo il criterio della minima aspirazione. Come è mostrato nella tabella seguente, otteniamo in questo caso risultati diversi in funzione dell'aspettativa minima:

	$p(u_{ij}{}^{3}6)$	$p(u_{ij}{}^{3}7)$	$p(u_{ij}{}^{3}8)$
a_1	*0.8*	*0.6*	*0.6*
a_2	*1.0*	*0.3*	*0.0*
a_3	*0.0*	*0.7*	*0.0*
a_4	*0.0*	*0.3*	*0.2*
a_5	*0.6*	*0.3*	*0.1*

Un'aspirazione minima pari a *6* milioni fa si che la migliore alternativa sia la a_2 mentre un'aspirazione pari a *7* milioni sposta la scelta sull'alternativa a_3 e infine un'aspirazione pari a *8* milioni fa si che la migliore alternativa sia invece la a_1.

- *Formulazione continua del problema decisionale*

Nella formulazione finora esaminata del problema decisionale è stata implicitamente fatta l'ipotesi che gli eventi fossero distribuiti in modo discreto. A volte però, come abbiamo già visto per l'analisi del rischio, tale ipotesi non consente di rappresentare bene la struttura del problema in quanto l'incertezza degli eventi è descritta da una variabile aleatoria continua all'interno di un determinato intervallo. In altri casi, per ragioni di efficienza, anche quando sia possibile distinguere eventi discreti può essere conveniente descriverne la variabilità come continua se il loro numero è molto elevato.
Se y è la variabile che descrive tutti i possibili eventi, allora affinchè il problema sia decidibile, deve esistere per la generica decisione i-esima una funzione $u_i(y)$ continua che definisce l'utile associato ad ogni evento.
Il valore atteso dell'utilità per la generica i-esima azione può essere ricavato attraverso l'integrazione

$$m_i = \int p(y)u_i(y)\ dy$$

mentre il valore della varianza[5] è ricavato dalla:

$$s_i^2 = \int p(y)[u_i(y) - m_i]^2\ dy$$

Il valore dell'informazione

A volte nell'ambito di un problema decisionale è possibile assumere informazioni aggiuntive che possono in qualche modo influire sulla stima delle probabilità associate ai diversi eventi. L'aggiunta di elementi attendibili di valutazione consente attraverso la riduzione del rischio di incrementare il valore atteso dell'utile[6]; tale variazione è legata al valore che può essere attribuito all'informazione.
L'aggiornamento della stima delle probabilità può essere calcolato utilizzando il teorema di Bayes[7].
Vediamo un semplice esempio applicativo.

- *Influenza delle informazioni supplementari sulla diagnosi del malfunzionamento di un impianto di betonaggio*

[5] Il valore della semivarianza è ottenuto in modo analogo limitando l'integrazione all'intervallo a sinistra del valore atteso dell'utilità.
[6] Come si può intuire un'informazione completamente attendibile consentirebbe di ricondurre il problema ad una forma deterministica, il che consentirebbe di scegliere l'azione che semplicemente produce il miglior risultato con l'evento di cui è certa l'evenienza.
[7] Il teorema di Bayes è discusso nell'Appendice B.

Durante l'esecuzione di un'estesa pavimentazione in calcestruzzo in cui saranno effettuati getti per un ammontare di *3000* mc, a causa della scarsa lavorabilità della miscela di calcestruzzo viene effettuata una prima analisi che individua le due seguenti possibili cause, ritenute inoltre mutuamente esclusive: il dosaggio automatico della centrale di betonaggio non funziona correttamente o il nuovo additivo impiegato è di scarsa qualità.
Sulla base dell'esperienza e degli indizi a disposizione, si stima che la probabilità che la mancanza di fluidità sia da attribuire alla centralina di dosaggio sia pari al *40%* mentre è più probabile (*60%*) che la causa sia da attribuire all'additivo.
A causa della difficoltà di costipazione del calcestruzzo è stata misurata una diminuzione del *60%* della produttività nei getti, che in condizioni ottimali è di *10 mc/h*. Escludendo il costo dei materiali, possiamo considerare che i costi sostenuti dall'impresa per la realizzazione dell'opera siano tutti proporzionali al tempo speso nel completamento dell'opera. In particolare sono impiegati due operai con una retribuzione media pari a *28000 £/h*; inoltre i costi indiretti e le spese generali sostenute assommano a *25000 £/*h ottenendo così un costo totale orario pari a *81000 £/h*.
Continuando il lavoro senza intervenire in alcun modo, si ottiene, escludendo il costo dei materiali, un costo totale pari a

$$C = \frac{3000 \ \ mc}{4 \ \ mc / h} \cdot 81000 \ \ £ / h = 60{,}75 \ \ milioni$$

mentre nel caso il problema non si fosse presentato avremmo avuto un costo totale, sempre escludendo il costo dei materiali, pari a *24.30* milioni.
Le possibili alternative che si prospettano per migliorare tale situazione, sono quella di acquistare il vecchio tipo di additivo con il quale non erano mai stati riscontrati problemi (a_1) nel qual caso si avrebbe un costo aggiuntivo pari a *13.09* mil., e quella di interrompere la produzione per ispezionare la centralina e ripararne l'eventuale difetto nel dosaggio (a_2), con un costo che, considerando anche il ritardo provocato sull'avanzamento dei lavori, è stimato in *10.41* mil.
Nella tabella seguente schematizziamo il problema ponendo in relazione le due alternative con i due possibili eventi (e_1 additivo di buona qualità e centralina difettosa, e_2 additivo di scarsa qualità e centralina funzionante) al fine di valutare il valore atteso del costo in funzione di ognuna delle decisioni.

	e_1,*p=0.4*	e_2,*p=0.6*	*m*
a_1	*73.84 mil.*	*37.39 mil.*	*51.97 mil.*
a_2	*34.71 mil.*	*71.16 mil.*	*56.58 mil.*

Il costo di ogni situazione è stato ottenuto sommando ai costi sostenuti per i due possibili interventi, il costo di realizzazione senza considerare i materiali già in possesso dell'impresa. Ad esempio qualora si optasse per l'acquisto del vecchio additivo (a_1) e la scarsa lavorabilità del calcestruzzo dipendesse dalla centralina (e_1), al costo di *13.09* milioni dovrebbe essere sommato il costo di realizzazione considerando una produttività che rimarrebbe di *4* mc/h mentre se il problema dipendesse effettivamente dal nuovo additivo alla spesa dovremmo aggiungere il costo di realizzazione considerando la migliore produttività e cioè *24.30* milioni. Il calcolo del valore atteso della produttività è ottenuto utilizzando le probabilità associate agli eventi e_1 ed e_2.
Sulla base del valore atteso, la prima alternativa e cioè acquistare il vecchio tipo di additivo, è quella che dovrebbe essere scelta.
Esiste però la possibilità di effettuare una prova di qualità dell'additivo che consentirebbe di avere un ulteriore elemento di valutazione. La prova non è però del tutto affidabile; dati statistici affermano infatti

che nei casi in cui l'additivo è di buona qualità la prova può dare il risultato opposto con una probabilità del *10%* e quando invece l'additivo è effettivamente di scarsa qualità, la prova può affermarne la buona qualità con una probabilità del *15%*. L'affidabilità della prova è riassunta nella tabella seguente.

qualità additivo ® ↓ *risultato prova*	e_1 *buona qualità* *(centralina difettosa)*	e_{2s} *scarsa qualità* *(centralina funzionante)*
z_1 *buona qualità*	$p(z_1\|e_1)=0.90$	$p(z_1\|e_2)=0.15$
z_2 *cattiva qualità*	$p(z_2\|e_1)=0.10$	$p(z_2\|e_2)=0.85$

In funzione del risultato [z_1, z_2] dell'eventuale prova, le stime di probabilità delle cause della scarsa lavorabilità verrebbero così modificate:

$$p(e_1|z_1) = \frac{p(z_1|e_1)\cdot p(e_1)}{p(z_1|e_1)\cdot p(e_1) + p(z_1|e_2)\cdot p(e_2)} = \frac{0.9\cdot 0.4}{(0.9\cdot 0.4 + 0.15\cdot 0.6)} = 0.80$$

$$p(e_1|z_2) = \frac{p(z_2|e_1)\cdot p(e_1)}{p(z_2|e_1)\cdot p(e_1) + p(z_2|e_2)\cdot p(e_2)} = \frac{0.1\cdot 0.4}{(0.1\cdot 0.4 + 0.85\cdot 0.6)} = 0.07$$

$$p(e_2|z_1) = \frac{p(z_1|e_2)\cdot p(e_2)}{p(z_1|e_1)\cdot p(e_1) + p(z_1|e_2)\cdot p(e_2)} = \frac{0.15\cdot 0.6}{(0.9\cdot 0.4 + 0.15\cdot 0.6)} = 0.20$$

$$p(e_2|z_2) = \frac{p(z_2|e_2)\cdot p(e_2)}{p(z_2|e_1)\cdot p(e_1) + p(z_2|e_2)\cdot p(e_2)} = \frac{0.85\cdot 0.6}{(0.1\cdot 0.4 + 0.85\cdot 0.6)} = 0.93$$

Quindi se la prova confermasse la buona qualità dell'additivo, la probabilità $p(e_1)$ che effettivamente questo sia tale salirebbe dal *40%* all'*80%;* viceversa se la prova confermasse la scarsa qualità dell'additivo la probabilità che ciò sia vero salirebbe dal *60%* al *93%*.
In funzione di questi dati e dei risultati della prova i valori attesi del costo per le due decisioni alternative sarebbero modificati come descritto nella tabella seguente.

	z_1	z_2
a_1	*66.55 mil.*	*39.94 mil.*
a_2	*42.00 mil.*	*68.61 mil.*
$min(a_1,a_2)$	*42.00 mil.*	*39.94 mil.*

Come si può vedere, in questo caso per ottenere il valore atteso in funzione del risultato della prova, deve essere considerato il valore minimo tra quello ottenibile con la decisione a_1 e quello ottenibile con la decisione a_2; ciò perchè si suppone che il decisore sia razionale e quindi scelga, a ragion veduta, la migliore delle opzioni.
Utilizzando i dati a disposizione prima che la prova sia effettuata, è possibile stimare anche le probabilità che questa fornisca come risultato z_1 o z_2.
Ciò è possibile notando che per z_1 si può scrivere

$$p(z_1) = p(z_1 \cap e_1) + p(z_1 \cap e_2) = p(z_1|e_1)\cdot p(e_1) + p(z_1|e_2)\cdot p(e_2)$$

e che un'analoga equazione può essere scritta per z_2.
Otteniamo allora svolgendo i calcoli: $p(z_1)=0.45$ e $p(z_2)=0.55$.
Possiamo quindi comporre i valori attesi della produttività, ottenuti per i due possibili risultati al fine ottenere il valore atteso del costo qualora venga effettuata la prova sull'additivo.

$$m = 42.00 \times 0.45+39.94 \times 0.55 \cong 40.87 \text{ milioni}$$

Senza la prova avevamo per le due decisioni i valori attesi di produttività pari a *51.97* milioni per la prima e *56.58* milioni per la seconda; confrontando il valore ottenuto nel caso sia effettuata la prova con il minore tra questi (*51.97* milioni) si ottiene una differenza di *11.10* milioni. Questo è il costo che potrebbe essere al massimo sostenuto perchè risulti conveniente effettuare la prova.
Nella figura 1.16 il problema decisionale proposto è schematizzato come albero di decisione; in questo caso il costo della prova è indicato con *x* e come si può vedere la scelta migliore è quella per cui si ottiene il minimo costo atteso tra le alternative *a'* e *a"* che indicano rispettivamente '*effettuare*' e '*non effettuare*' la prova.

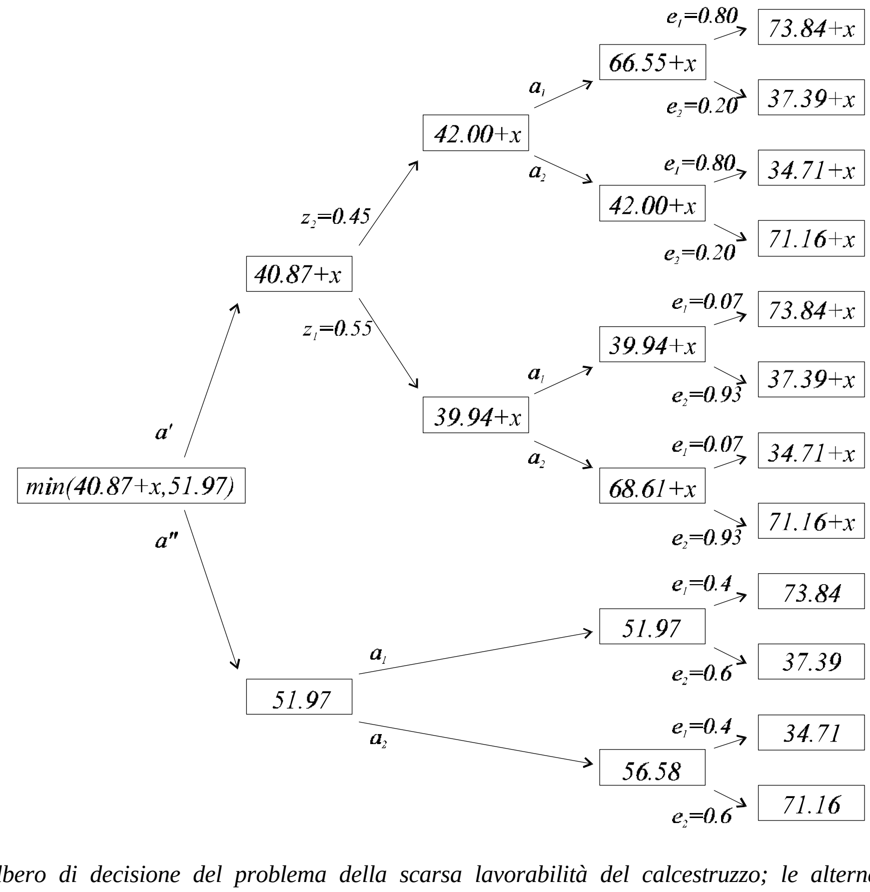

Fig. 1.16 *Albero di decisione del problema della scarsa lavorabilità del calcestruzzo; le alternative a' e a" rappresentano le decisioni di fare e non fare la prova sull'additivo e x rappresenta il costo di tale prova.*

Il problema decisionale nel caso di alternative non esclusive

In molte situazioni le possibili strategie decisionali non sono costituite da alternative che si escludono vicendevolmente ma da opportune mediazione di scelte. In questi casi il problema è più complesso e implica spesso l'impiego di modelli di ottimizzazione per la ricerca della migliore politica decisionale che non può essere in genere espressa attraverso un'unica azione ma attraverso un insieme di scelte strettamente correlate.
Nell'esempio applicativo che segue vedremo un caso tipico di questo genere di problema decisionale per la cui risoluzione si impiega la tecnica della programmazione dinamica.

- *Un esempio di proporzionamento degli investimenti*

Deve essere scelta la più opportuna politica d'investimento avendo a disposizione *3* diverse opportunità ognuna delle quali offre utili attesi non proporzionali alla somma investita.
Gli utili attesi per le possibili frazioni di capitale (multipli di *10* milioni) impegnate in ciascun investimento, con un capitale totale di *40* milioni, sono quelli indicati nella tabella seguente.

	10 milioni	*20 milioni*	*30 milioni*	*40 milioni*
investimento 1	*20*	*50*	*60*	*70*
investimento 2	*10*	*30*	*60*	*70*
investimento 3	*10*	*40*	*50*	*80*

Nel caso in cui non sia investita alcuna somma su una o più alternative, si suppone che da queste si ottenga ovviamente un utile nullo.
Formalmente l'obiettivo è quello di massimizzare la funzione non lineare:

$$max\ z = f(x_1)+f(x_2)+ f(x_3)$$

in cui le variabili decisionali x_i rappresentano le somme investite sulle tre diverse alternative; la funzione è inoltre soggetta ai vincoli:

$x_1+x_2+x_3$ £ 40
x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, x_3 ³ 0,

La non linearità del problema non ne consente una formalizzazione in termini di programmazione lineare. È però possibile costruire un modello basato sulla programmazione dinamica avendo la cura di individuare una serie di stadi decisionali per ognuno dei quali sia definibile un insieme finito di stati[8].
Un'efficace schematizzazione è quella in cui gli stadi decisionali sono determinati dalle successive allocazioni di capitale sulle tre alternative d'investimento e i relativi stati rappresentano invece le frazioni di capitale impegnate.
Tale approccio consente di descrivere l'utile atteso totale nella seguente forma recursiva che assumiamo

[8] la schematizzazione in stadi e stati del problema decisionale deve soddisfare le proprietà di cui si discute in Appendice A.

come funzione obiettivo

$$f_n^*(s) = \max_{x_n}\left\{ f_n(s) + f_{n+1}^*(c - s)\right\}$$

dove la $f_n*(s)$ indica il valore ottimale della funzione obiettivo nello stato s dello stadio n, in cui s rappresenta il capitale che si investe nell'alternativa n; inoltre con c si indica il capitale totale disponibile (*40* milioni) e con $(c\text{-}s)$ si rappresenta il capitale ancora disponibile per l'investimento $(n+1)$.
Iniziando dall'ultimo stadio, si decide la quantità di capitale da investire nel terzo investimento; per far ciò sarebbe però necessario conoscere l'entità della frazione non ancora impegnata nel primo e nel secondo investimento. Dato che tale frazione non è stata ancora determinata è necessario considerare tutte le possibilità (*0, 10, 20, 30, 40* milioni).
Per *40* milioni abbiamo:

$f_3^*(40) = max(f_3(0), f_3(10), f_3(20), f_3(30), f_3(40))=max(0,10,40,50,80)=80$

e così via per i rimanenti stati:

$f_3^*(30) = 50; f_3^*(20) = 40; f_3^*(10) = 10; f_3^*(0) = 0.$

A questo punto si procede alla valutazione dello stadio *2* per il quale sono noti gli utili ottenibili nello stadio 3, per l'investimento di *40* milioni si ottiene:

$$\begin{aligned} f_2^*(40) &= max\ (f_2(0)+f_3^*(40\text{-}0),f_2(10)+f_3^*(40\text{-}10),f_2(20)+ \\ &\qquad f_3^*(40\text{-}20),f_3(30)+f_3^*(40\text{-}30),f_2(40)+f_3^*(40\text{-}40))= \\ &= max\ (0+80,10+50,30+40,60+10,70+0) = 80, con\ s=0 \end{aligned}$$

per le altre possibilità dello stadio si ottiene:

$f_2^*(30) = 60, con\ s=30; f_2^*(20) = 40, con\ s=0;$

$f_2^*(10) = 10, con\ s=10; f_2^*(0) = 0, con\ s=0$

Infine nello stadio *1* l'unico stato è quello di partenza nel quale è disponibile tutto il capitale di *40* milioni, per cui basta valutare:

$$\begin{aligned} f_1^*(40) &= max\ (f_1(0)+f_2^*(40\text{-}0),f_1(10)+f_2^*(40\text{-}10),f_1(20)+ \\ &\qquad f_2^*(40\text{-}20),f_1(30)+f_2^*(40\text{-}30),f_1(40)+f_2^*(40\text{-}40)) = \\ &= max(0+80,20+60,50+40,60+10,70+0) = 90, con\ s=20 \end{aligned}$$

Il risultato che si ottiene è l'utile massimo conseguibile investendo i *40* milioni; la miglior politica può essere ricavata, con i dati ora a disposizione, nel modo di seguito descritto.
La prima decisione è quella che consente di ottenere il massimo utile totale e quindi è quella di investire *20* milioni sulla prima alternativa.

Sulla seconda alternativa non deve essere investita alcuna somma in quanto in questo stadio rimangono disponibili *20* milioni per il secondo e il terzo investimento e dal calcolo effettuato abbiamo che $f_2^*(20)=40$ si ottiene per $s=0$. Infine rimane determinato l'ammontare della somma sul terzo investimento che è pari ai rimanenti *20* milioni.

Il problema decisionale in situazioni di competizione

Finora abbiamo analizzato il problema decisionale in situazioni in cui l'unica figura attiva è rappresentata dal decisore. In molte situazioni però la decisione deve essere presa in condizioni di competizione con altri decisori che tendono ad ottenere in modo esclusivo lo stesso obiettivo. In questo caso il decisore deve valutare l'opportunità offerta da un'alternativa anche in funzione del possibile comportamento degli altri decisori.
La formalizzazione analitica di questo tipo di problema è chiamata nel campo della ricerca operativa: *teoria dei giochi*[9].
Un gioco è inteso come una situazione competitiva fra *N* decisori (giocatori), condotta secondo un protocollo di regole che definisce le alternative decisionali (mosse) a disposizione dei diversi decisori e in modo che ognuno di essi conosca le mosse che gli altri possono eseguire.
Una situazione particolare è quella in cui l'utile ottenuto da uno dei giocatori uguaglia la perdita degli altri; in questo caso il gioco è detto a *somma nulla*. Il caso sul quale ci soffermeremo in questo paragrafo è quello semplice in cui partecipano due soli decisori.
È possibile immaginare che ogni giocatore abbia a disposizione un insieme finito (anche se a volte molto grande) di possibili strategie, intese come sequenze di mosse. Si suppone inoltre che ogni giocatore conosca le possibili strategie degli altri giocatori ma non quale tra queste sarà quella scelta.
Nel caso in cui i giocatori siano due, è possibile rappresentare il problema decisionale per mezzo di una matrice $\boldsymbol{U}$ il cui elemento u_{ij} indica l'utile ottenuto dal primo decisore quando questi attua la *i*-esima strategia s'_i e il secondo decisore, che ottiene una perdita della stessa entità[10], attua la *j*-esima strategia s''_j.

	s''_1	...	s''_j	...	s''_n
s'_1	u_{11}	...	u_{1j}	...	u_{1n}
...	...	...	...	...	...
s'_i	u_{i1}	...	u_{ij}	...	u_{in}
...		...	...	...	...
s'_m	u_{m1}	...	u_{mj}	...	u_{mn}

L'obiettivo della teoria dei giochi è quello di determinare criteri razionali per la scelta della propria strategia nell'ipotesi che il competitore sia razionale, che faccia cioè il possibile per ottenere i propri migliori risultati.
Consideriamo ad esempio la seguente matrice degli utili espressi in milioni:

[9] Per un maggiore approfondimento, rispetto a quello qui perseguito, dei concetti della teoria dei giochi si può far riferimento a HILLIER F.S., LIEBERMAN G.J., *Introduzione alla ricerca operativa,* Franco Angeli, Milano 1994, cap. 9; COLORNI A., *Ricerca operativa*, Clup, Milano, 1984, cap. 17.
[10] Nel caso opposto qualora il primo decisore ottenga una perdita il secondo otterrà un utile della medesima entità. Generalmente gli utili sono considerati positivi e le perdite negative.

	s”₁	*s”₂*	*s”₃*
s'_1	*18*	*4*	*12*
s'_2	*18*	*12*	*32*

È facile rendersi conto che il primo decisore tenderà a scegliere la seconda strategia perchè dominante sulla prima; essa infatti ottiene in ogni caso risultati migliori. Il secondo decisore non prenderà in considerazione la prima e la terza strategia perchè rispetto alla seconda producono in ogni caso perdite maggiori. Supponendo che i decisori siano razionali, il secondo sceglierà allora la seconda strategia, che è quella che minimizza la perdita quando, com’è razionale che sia, il primo decisore opterà per la seconda strategia. Il problema si risolve in questo modo con l’utile di *12* milioni per il primo decisore e una uguale perdita per il secondo. Ciò che in questo caso deve essere evidenziato è che a nessuno dei giocatori conviene cambiare la propria scelta e che il concetto di strategia dominante consente di ridurre le dimensioni del problema decisionale e di portarlo in alcuni casi all’unica mossa conveniente per entrambi i giocatori.
Quando non esistono situazioni dominanti come nel caso schematizzato nella matrice seguente la scelta razionale della strategia non è più ovvia.

	s''_1	s''_2	s''_3
s'_1	*-3*	*3*	*-3*
s'_2	*2*	*0*	*0*
s'_3	*4*	*-2*	*-2*

Dobbiamo allora considerare che a differenza del problema decisionale semplice, in situazione di competizione gli eventi che influenzano i risultati di una decisione tenderanno sempre ad essere i più sfavorevoli, in quanto determinati dalla controparte. È perciò preferibile utilizzare un criterio che offra i migliori risultati nel peggiore dei casi e cioè il criterio del *MaxiMin*[11].
Nell’esempio, per il giocatore *1* la strategia che assicura minori perdite è la s'_2; questa strategia se attuata ripetutamente non può che portare benefici fornendo nel peggiore dei casi una perdita nulla; cambiando invece strategia il decisore *1* si sottoporrebbe al rischio di essere prevenuto con la conseguente possibilità di subire perdite.
Il giocatore *2* ragionando in modo analogo dovrebbe scegliere la strategia s''_3 che nel peggiore dei casi assicura una perdita nulla.
In questa situazione le mosse dei due giocatori porterebbero a una stabilizzazione del gioco sulle due mosse con un bilancio finale in pareggio e ciò perchè la propria miglior mossa rimane tale anche conoscendo la miglior mossa dell’avversario e ipotizzando di conseguenza che questi la effettui. Ciò ci porta a concludere che quando un elemento della matrice degli utili rappresenta la migliore strategia di entrambi i decisori, si dice che il gioco è stabile e il valore dell’elemento è detto valore del gioco[12].
L’esistenza del valore del gioco fa si che per entrambi i giocatori sia vantaggioso attuare la sola strategia trovata con il criterio del *MaxiMin* e ciò perchè a nessuno dei due conviene cambiare strategia quando non ci sia motivo di pensare che l’altro giocatore faccia altrettanto.
Consideriamo ora la seguente matrice degli utili

	s''_1	s''_2	s''_3
s'_1	*0*	*-4*	*4*

[11] *MiniMax* qualora si tratti di perdite.
[12] Nel caso in cui questo valore sia nullo il gioco è anche detto equo.

s'$_2$	*9*	*8*	*-6*
s'$_3$	*4*	*6*	*-8*

In questo caso il decisore *1* dovrebbe scegliere la prima strategia che gli consente una perdita massima pari a *4* milioni e il decisore *2* la terza strategia che gli consente la perdita massima pari a *4* milioni. Se entrambi giocassero le strategie sopra citate, il primo giocatore vincerebbe *4* milioni.
Il giocatore *2* rendendosi però conto di questo esito concluderebbe a ragione che prevedendo che il primo giocatore scelga la prima strategia egli potrebbe vincere *4* milioni scegliendo la sua seconda.
A sua volta però il primo giocatore potrebbe prevenire questa mossa scegliendo la seconda strategia invece della prima e avere un utile di *8* milioni.
Il giocatore *2* per prevenire questa ulteriore mossa potrebbe tornare alla sua strategia iniziale, la terza che gli permetterebbe di avere un utile di *6* milioni. Questo porterebbe di conseguenza il giocatore *1* a scegliere anch'egli la sua strategia iniziale, e cioè la prima, tornando così alla situazione di partenza e aprendo la strada a un nuovo ciclo.
Quando il gioco, come nell'esempio, non ha un valore unico, la soluzione trovata con il criterio del *MaxiMin* non è stabile e il problema decisionale si dice appunto instabile.
La soluzione di un problema instabile è più complessa; in questo caso infatti nessuno dei giocatori ha buoni motivi per pensare che l'altro scelga una determinata strategia in quanto le strategie convenienti sono più d'una.
La strategia attuata dovrà pertanto essere scelta tra una di quelle accettabili sulla base di un opportuno criterio di casualità.
Dal punto di vista del primo decisore, può essere applicato il criterio della massimizzazione dell'utile atteso espresso formalmente nel seguente modo

$$\max(u) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j u_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j u_{ij}$$

in cui x_i è la probabilità assegnata dal primo decisore alla sua *i*-esima strategia di essere scelta attraverso un'estrazione casuale; y_j è la probabilità che il secondo decisore scelga invece la propria *j*-esima strategia e infine u_{ij} è l'utile[13] per il primo decisore nel caso siano rispettivamente attuate le due citate strategie.
Per il primo decisore, il problema è quello di trovare il vettore $[x_1,x_2,...,x_m]$ che massimizza l'utile atteso per qualsiasi strategia del secondo decisore; ciò equivale a dire che l'obiettivo deve essere scomposto nei seguenti *n* sub-obiettivi

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} u_{ij} x_i\right) \quad per \;\; j = [1,..,n]$$

È facile rendersi conto che questi sub-obiettivi possono essere espressi attraverso il seguente problema di programmazione lineare:

[13] Perdita nel caso che il valore sia negativo.

$$\max(m) = x_{m+1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ij} x_i - x_{m+1} \geq 0 \quad per \;\; j = [1,..,n]$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad per \;\; i = [1,..,m]$$

in cui la variabile x_{m+1} è introdotta come funzione obiettivo al fine di esprimere gli obiettivi come vincoli[14].
Ragionando in modo analogo per il secondo decisore si trova che in questo caso l'espressione del problema decisionale è il problema duale del primo[15]:

$$\min(m) = y_{n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} y_j - y_{n+1} \leq 0 \quad per \;\; i = [1,..,m]$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad per \;\; j = [1,..,n]$$

Ciò comporta in primo luogo che le strategie ottimali di entrambi i decisori possono essere trovate risolvendo uno solo dei problemi e che i valori trovati per le funzioni obiettivo sono uguali e costituiscono il valore del gioco.

- *Un esempio di decisione in condizioni di competizione: individuazione della più economica strategia di controllo di una lavorazione*

Deve essere decisa la strategia più conveniente per il controllo campionario di una lavorazione svolta da una stazione subappaltante.
Quest'ultima ha la piena conoscenza della qualità di ogni unità di prodotto, desunta dall'andamento del processo di lavorazione.
Da parte del committente però la qualità del prodotto non è accertabile con una semplice ispezione; a tal

---

[14] Massimizzando la x_{m+1}, la prima parte del termine, e cioè la $\sum_{i=1}^{m} u_{ij} x_i$, sarà di conseguenza anch'essa massimizzata; la struttura del vincolo impone infatti che questa sia sempre maggiore o al più uguale alla x_{m+1}.
[15] Il senso e la forma del problema di ottimizzazione duale sono discussi nell'appendice A. Vale la pena far notare che in questo caso l'obiettivo è trasformato, analogamente al caso precedente, in una serie di disequazioni in cui il termine $\sum_{j=1}^{n} u_{ij} y_j$ è vincolato ad essere sempre minore al termine y_{m+1} che se minimizzato implica di conseguenza la minimizzazione del primo.

fine è invece necessario effettuare un test prima però che vengano svolte successive lavorazioni che ne renderebbero impossibile lo svolgimento.
Nelle condizioni contrattuali è prevista la possibilità di richiedere la prova di qualità su ogni unità di prodotto; tale prova viene effettuata dalla stessa stazione subappaltante sotto il controllo del committente.
Nel caso in cui la prova confermi la buona qualità è previsto un ulteriore compenso per la stazione subappaltante che di fatto raddoppia il prezzo dell'unità di prodotto mentre per il caso contrario è prevista una penale pari a *10* volte il prezzo del prodotto oltre al mancato pagamento dell'unità difettosa.
È noto che statisticamente la stazione subappaltante effettua in modo corretto la lavorazione sull'*90%* delle unità prodotte.
Rendiamo unitario il prezzo stabilito per ogni unità di prodotto sul quale non si effettua il controllo di qualità; tale prezzo si raddoppia qualora invece venga richiesto il test; nel caso però che il test verifichi la cattiva qualità della lavorazione è prevista una penale per la stazione subappaltante pari al doppio del prezzo dell'unità di prodotto.
La stazione subappaltante ha due strategie possibili:

- *dichiarare la reale qualità* del prodotto per ottenere il prezzo stabilito per le parti correttamente eseguite e non controllate, non ottenere alcuna somma per le parti difettose, ottenere il doppio del prezzo stabilito per le parti sulle quali viene richiesto il test di qualità;
- *dichiarare che la qualità è buona anche quando questa non lo è* per ottenere il prezzo stabilito sia per le parti eseguite correttamente che per quelle non eseguite correttamente, ottenere il doppio del prezzo stabilito per le parti buone sulle quali viene richiesto il test di qualità e pagare la penale pari a *10* volte il prezzo del prodotto qualora il test confermi la scarsa qualità del prodotto.

Il committente ha anch'esso due strategie possibili:

- *credere* a quanto dichiarato sulla buona qualità del prodotto con le conseguenze già analizzate parlando delle strategie della stazione subappaltante;
- *non credere* a quanto dichiarato e far effettuare un controllo di qualità, anche qui con gli effetti già analizzati.

È utile notare che le strategie non coincidono con le mosse; infatti le mosse al contrario delle strategie dipendono di volta in volta dalla qualità dell'unità di prodotto in esame.
Il problema per il committente è quello di minimizzare la somma esborsata per il servizio; dato che il problema non è deterministico è però necessario minimizzare il valore atteso di tale somma.
Possiamo però, come già detto, studiare il problema dal punto di vista della stazione subappaltante e risolvere contemporaneamente quello del committente come problema duale del primo.
In questo caso è necessario massimizzare il valore atteso della somma ottenuta per il servizio.
Questa è, nel caso in cui si dichiari sempre la reale qualità del prodotto e senza che questa venga mai messa in dubbio pari a

$$u_{11}=0.9\times(1)+0.1\times(0)=0.90$$

mentre quando pur dichiarando la reale qualità del prodotto questa sia messa sistematicamente in dubbio[16] abbiamo

$$u_{12}=0.9\times(2)+0.1\times(0)=1.80$$

Nel caso invece in cui si dichiari sempre che la qualità del prodotto è buona; l'utile atteso è, nell'eventualità che non sia richiesta la verifica

[16] Ovviamente non nei casi in cui già si dichiara la scarsa qualità

$$u_{21}=0.9\times(1)+0.1\times(1)=1.00$$

mentre nel caso in cui è richiesta la verifica

$$u_{22}=0.9\times(2)+0.1\times(-10)=0.80$$

Il problema decisionale può essere descritto, dal punto di vista della stazione subappaltante, attraverso la seguente matrice:

	s''_1	s''_2
s'_1	*0.90*	*1.80*
s'_2	*1.00*	*0.80*

in cui s'_1 ed s'_2 sono le due strategie della stazione subappaltante mentre s''_1 e s''_2 sono invece le due strategie del committente.
Dall'analisi della matrice ci si può facilmente rendere conto che il gioco non è stabile; ciò comporta la necessità di individuare una strategia composta da una miscela di strategie pure che ottimizzi la il ricavo ottenuto con la commessa.
Applicando i risultati trovati in precedenza, si può costruire la formalizzazione del problema decisionale nei termini del seguente problema di programmazione lineare

$max\ (u) = x_3;$
$0.90\times x_1 + 1.00\times x_2 - x_3 \geq 0;$
$1.80\times x_1 + 0.80\times x_2 - x_3 \geq 0;$
$x_1 + x_2 = 1.00;$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$

Risolvendo il problema di programmazione lineare si ottiene la soluzione nei seguenti valori delle variabili decisionali

$x_1 \cong 0.18; x_2 = 0.82; u = 0.98.$

I valori così trovati consentono in primo luogo di stimare l'utile atteso della stazione pari a *0.98* per ogni unità di prodotto; per ottenere tale utile è necessario attuare una strategia che si compone nel seguente modo: nel *18%* dei casi deve essere dichiarata la reale qualità del prodotto e nel rimanente *82%* dei casi dichiarare che la qualità è buona anche quando ciò non è vero.
Dal punto di vista della controparte il problema decisionale è affrontato come minimizzazione del pagamento risolto attraverso il seguente problema di programmazione lineare

$min\ (p) = y_3;$
$0.90\times y_1 + 1.80\times y_2 - y_3 \leq 0;$
$1.00\times y_1 + 0.80\times y_2 - y_3 \leq 0;$
$y_1 + y_2 = 1.00;$
$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0.$

Si può facilmente verificare che tale problema è il duale di quello precedente per cui il valore ottimale della funzione obiettivo è uguale a quello ottimale della funzione nel problema precedente. Infatti la soluzione che si ottiene è

$y_1 @ 0.91; y_2 @ 0.09 ; p @ 0.98.$

In pratica com'era da attendersi il valore atteso del pagamento è pari al valore atteso del ricavo della stazione subappaltante. Ciò che è però importante è che tale risultato è ottenuto attuando una strategia composta nel seguente modo: nel *91%* dei casi il prodotto deve essere accettato senza richiederne la verifica della qualità e nel rimanente *9%* dei casi tale verifica deve invece essere richiesta.

Un problema che si può porre è stabilire se esista un'entità della penale che renda il problema stabile, imponendo contemporaneamente alla stazione subappaltante come unica strategia conveniente quella di affermare sempre la reale qualità del prodotto.
Analizzando la matrice dei pagamenti ci si può facilmente rendere conto che tale possibilità non esiste. Infatti l'entità della penale compare solo nel termine (*2,2*) della matrice e ciò fa si che non sia possibile modificare la seconda riga, corrispondente alla strategia di non dichiarare la reale qualità, per renderla dominata dalla prima.
Ciò che invece si può vedere è che se si incrementasse il valore del termine (*2,2*) a *1*, e ciò diminuendo la penale da *10* a *8* volte il prezzo del prodotto, il gioco diverrebbe stabile in quanto per il committente la seconda colonna sarebbe dominata dalla prima e ciò renderebbe conveniente credere sempre a quanto afferma la stazione subappaltante.
Questo fatto sarebbe immediatamente sfruttato dalla stazione la quale noterebbe che la seconda strategia, negare la scarsa qualità del prodotto quando ciò si verifica, sarebbe l'unica strategia conveniente assicurando un incasso atteso maggiore della prima.
Perciò l'insidiosa situazione che in questo caso si stabilizza è quella in cui la stazione affermerebbe sempre la buona qualità del prodotto e per il committente non sarebbe in alcun caso conveniente chiederne la verifica.