A

Cenni di programmazione matematica

A.1 Introduzione

Molti problemi di collocazione ottimale delle risorse possono essere schematizzati attraverso modelli analitici in cui obiettivi e vincoli sono rappresentati per mezzo di entità matematiche. Per programmazione s'intende la ricerca della strategia che consente di ottenere il valore ottimale dell'obiettivo del problema tipicamente rappresentato da una misura di utilità. In particolare quando l'obiettivo può essere espresso come una funzione lineare di un certo numero di variabili e i vincoli come disequazioni lineari delle stesse variabili il modello di ottimizzazione si dice lineare. Come s'intuisce la programmazione lineare è allora la ricerca di quella combinazione di valori delle variabili per la quale in un modello lineare si ottiene il miglior valore dell'obiettivo. La varietà delle situazioni alle quali la programmazione lineare può essere applicata è notevole; dalla assegnazione di mezzi di produzione alla ricerca di schemi di trasporto, dalla articolazione temporale della produzione alla soluzione alla determinazione dell'impiego dei materiali che minimizza gli scarti.
In alcuni problemi la strategia ottimale non può essere sintetizzata in un'unica scelta ma deve essere espressa attraverso una sequenza di decisioni tra loro correlate che devono essere prese nelle diverse fasi (logiche o temporali) nelle quali può essere schematizzata l'evoluzione del contesto.
Un modello spesso utilizzabile in questi casi, soprattutto quando il problema è discreto, quando cioè le variabili possono assumere solo un insieme finito di valori possibili, è quello della programmazione dinamica. In questo capitolo approfondiremo gli in particolar modo gli aspetti relativi ai modelli di programmazione lineare estendendone la trattazione sia ai casi in cui le variabili possono assumere valori reali sia ai casi in cui invece le variabili possono assumere solo valori interi. Tratteremo infine anche i principali aspetti legati alla programmazione dinamica per la quale però, a differenza della programmazione lineare, più che la formulazione matematica è importante l'acquisizione di una serie di euristiche utili per ricondurre la struttura dei problemi nella forma che soddisfa le ipotesi alla base del modello.
Oltre a quelli accennati, sono stati sviluppati nel tempo molti altri modelli di programmazione molti dei quali per l'ottimizzazione di problemi non lineari. La specificità e la complessità di queste formalizzazioni sono però tali che la loro trattazione esuli dagli scopi del testo.

A.2 Il modello di programmazione lineare[1]

[1] Per gli scopi che il testo si prefigge, la trattazione degli argomenti legati alla programmazione lineare non può ovviamente essere ne intende essere esaustiva.
Una trattazione più approfondita è facilmente reperibile su uno specifico testo di Ricerca Operativa come ad esempio in BERTOLAZZI P., LUCERTINI M., *Programmazione matematica: formulazione di problemi e applicazioni,* Franco Angeli, Milano 1988; in BELLACICCO A., CUTILLO P., *Principi e tecniche di ricerca*

La formulazione canonica del modello di programmazione lineare è la seguente: trovare i valori delle variabili $x_1,x_2,\ldots,x_n$ che massimizzano la funzione lineare,

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n ,$$

soggetta ai vincoli,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

e

$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , \ldots , x_n \geq 0 ;$$

dove le c_i, b_i e a_{ij} sono costanti note, le variabili x_i sono dette *variabili di decisione* e la funzione Z è detta *funzione obiettivo*.
A questa formulazione che potrebbe apparire molto limitata nell'applicabilità, tale ad esempio da escludere i casi in cui la funzione debba essere minimizzata o quelli in cui i vincoli siano di maggiorazione o di uguaglianza, è possibile in effetti ricondursi con facilità[2].
Possiamo dare al modello di programmazione lineare un'interpretazione generica legata alla gestione del processo produttivo.
Le variabili di decisione $x_1,x_2,\ldots,x_n$ rappresentano i livelli di n possibili attività concorrenti[3], la Z descrive la misura dell'utilità[4] in funzione di tali variabili, mentre ognuna delle prime m disuguaglianze corrisponde a un vincolo di disponibilità massima delle altrettante risorse necessarie alle attività.
La generica b_j rappresenta quindi la disponibilità massima della risorsa j, i coefficienti c_i della funzione obiettivo l'utilità ottenuta per ogni unità del prodotto i, il coefficiente a_{ij} descrive infine la quantità della risorsa i consumata per la realizzazione di un'unità del prodotto j.
I vincoli di non negatività delle variabili di decisione esprimono la unidirezionalità del processo di produzione nel quale cioè non è possibile 'disassemblare' quantità di prodotto finito per riottenere risorse.
Per gli scopi del testo, più che la soluzione vera e propria di un modello di programmazione lineare è importante la costruzione stessa del modello, legata alla capacità di tradurre gli elementi di un problema decisionale nella struttura analitica sopra descritta. Allo scopo di chiarire i passaggi tipici di tale costruzione mostriamo nel seguito un classico esempio applicativo.

---

operativa, La Goliardica editrice, Roma, 1980; in SCHOEN F., *Teoria e metodi di ottimizzazione lineare*, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1991; in HILLIER F.S., LIEBERMAN G.J., *Introduzione alla ricerca operativa*, Franco Angeli, Milano 1994.

[2] Ad esempio moltiplicando per -1 la funzione per trasformare il problema di minimizzazione in un problema di massimizzazione o per trasformare una disuguaglianza $\leq$ in una $\geq$ e ancora sostituendo un vincolo di uguaglianza con una coppia di vincoli $\leq$ e $\geq$.

[3] Se ad esempio tali attività sono indirizzate alla produzione di determinati prodotti allora la generica x_i descriverà la quantità del prodotto i da produrre durante un dato periodo di tempo.

[4] Tipicamente un utile economico.

- *Un esempio di pianificazione ottimale delle attività*

Un'impresa di costruzioni gestisce tre filiali di dimensioni confrontabili. La produzione di ciascuna filiale è limitata dalla quantità di mano d'opera disponibile sia in termini di operai specializzati che di operai comuni. Le risorse attualmente disponibili sono le seguenti.

	Operai specializzati	*Operai comuni*
Fil. 1	*40*	*150*
Fil. 2	*60*	*200*
Fil. 3	*30*	*90*

L'organizzazione sta esaminando tre indirizzi di produzione che differiscono principalmente nel loro profitto atteso per unità di risorse impegnate:
A. *costruzioni stradali*;
B. *edilizia industriale*;
C. *edilizia residenziale*.
Il numero di squadre che può essere impiegato nei diversi indirizzi è limitato anche dall'entità delle attrezzature specifiche disponibili. La composizione di una squadra dipende dall'indirizzo in cui viene impiegata; infatti essa comprende in ogni caso un operaio specializzato ma il numero di operai comuni è variabile nel modo descritto nella tabella seguente.
Nella stessa tabella è inoltre riportato l'utile preventivato dall'impresa impiegando una squadra nei diversi indirizzi.

	Squadre	*Operai comuni per squadra*	*Utile mensile per squadra*
Ind. A	*70*	*5*	*4 mil.*
Ind. B	*80*	*4*	*3 mil.*
Ind. C	*30*	*3*	*1 mil.*

Infine allo scopo di mantenere un carico di lavoro uniforme fra le filiali, è opportuno che la percentuale di impiego degli operai specializzati sia la stessa per ciascuna filiale.
L'organizzazione vuole determinare le percentuali di risorse da impiegare e nei tre diversi indirizzi al fine di massimizzare l'utile preventivato.

È chiaro che le variabili di decisione x_{ij}, rappresentano in questo caso il numero di squadre o di operai specializzati della filiale i da impiegare nell'indirizzo j. Perciò lo scopo è quello di massimizzare la funzione che esprime l'utile mensile dell'impresa:

$$Z = 4(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A})+3(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B})+1(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C})$$

soggetta ai vincoli di limitazione del numero di operai specializzati a disposizione:

$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}$ £ 40
$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}$ £ 60
$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}$ £ 30

ai vincoli di limitazione del numero di operai comuni a disposizione:

$5x_{1A} + 4x_{1B} + 3x_{1C}$ £ 150
$5x_{2A} + 4x_{2B} + 3x_{2C}$ £ 200
$5x_{3A} + 4x_{3B} + 3x_{3C}$ £ 90

ai vincoli di limitazione delle attrezzature specifiche per i diversi indirizzi:

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}$ £ 70
$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}$ £ 80
$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C}$ £ 30

ai vincoli di uniformità delle proporzioni d'impiego nelle tre filiali:

$(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C})/40 = (x_{2A} + x_{2B} + x_{2C})/60 = (x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})/30$

che poste nella forma canonica diventano:

$3(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) - 2(x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) = 0$
$(x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) - 2(x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}) = 0$

e infine ai vincoli di positività delle variabili di decisione:

x_{ij} ³ 0 (per $i = 1, 2, 3$; e per $j = A, B, C$).

Come vedremo nel prossimo paragrafo il problema così formalizzato può essere efficientemente risolto utilizzando una tecnica chiamata 'algoritmo del simplesso'.
Per ora esaminiamo più a fondo le ipotesi che limitano l'applicabilità del modello di programmazione lineare.
Il primo requisito della programmazione lineare è che la funzione obiettivo ed ogni vincolo siano lineari; ciò comporta che la misura di utilità e l'impiego delle risorse siano proporzionali alle singole attività di produzione.
A volte però problemi che sembrano a prima vista soddisfare a tali requisiti nascondono ad una più attenta analisi la non linearità. Ad esempio molto spesso l'utile marginale di ciascun prodotto non è costante sull'intero campo di variazione dei livelli di produzione.
Una forma particolare di non linearità sorge quando vi sono interazioni fra alcune delle attività riguardanti la misura totale di efficacia; ciò può far si che la misura totale di efficacia derivante dal risultato congiunto delle attività non sia uguale alla somma delle quantità che risultano da ciascuna attività condotta singolarmente.
Un esempio di non linearità rispetto all'uso della risorsa si ha dove è realizzato un sottoprodotto con materiale di scarto dei prodotti principali; per conservare la linearità del modello, questo sottoprodotto si dovrebbe produrre ancora se solo uno di prodotti principali fosse fabbricato.
Come si può intuire, un problema pratico che soddisfi completamente tutte le ipotesi della programmazione lineare è senza dubbio molto raro. Ciò nonostante il modello di programmazione lineare è in molti casi un'utile rappresentazione dei problemi, in grado di fornire un'indicazione ragionevole sulla strategia ottimale da seguire.

A.3 L'algoritmo del simplesso

Nei casi in cui il numero di variabili di decisione non è maggiore di tre, è possibile dare un'interpretazione geometrica alla risoluzione di un problema di programmazione lineare.
Consideriamo ad esempio il seguente problema di massimizzazione della funzione a due variabili

$Z = 4x_1 + 5x_2$

sottoposta ai vincoli

x_1£5;
x_2£6;
$4x_1+3x_2$£24;

e

x1³0, x2³0.

Possiamo individuare la regione di ammissibilità su un piano cartesiano $[x_1,x_2]$ come mostrato nella figura A.1. Ci si può facilmente rendere conto che la regione di ammissibilità è in ogni caso convessa.

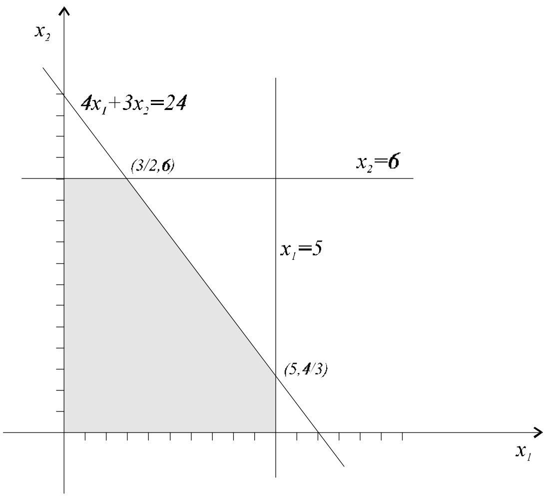

Fig. A.1 *La zona ombreggiata rappresenta la regione di ammissibilità dei valori di* (x_1,x_2).

Sulla terza coordinata Z sono rappresentati i valori della funzione obiettivo rispetto alle coordinate (x_1,x_2). Geometricamente la funzione obiettivo descrive un piano inclinato sull'orizzontale la cui intersezione con il piano $Z=0$ è a retta $3x_1+5x_2=0$ passante per l'origine. Incrementando i valori di Z si ottiene un fascio di rette parallele a questa, che descrive ognuna proiezione, sul piano $Z=0$, dei punti appartenenti al piano della funzione obiettivo e con uguale quota Z.
È facile vedere, come mostrato in figura A.2 che il massimo si ottiene quando la retta passa per il vertice $(3/2,6)$; con tali valori la funzione obiettivo assume un valore pari a 36.

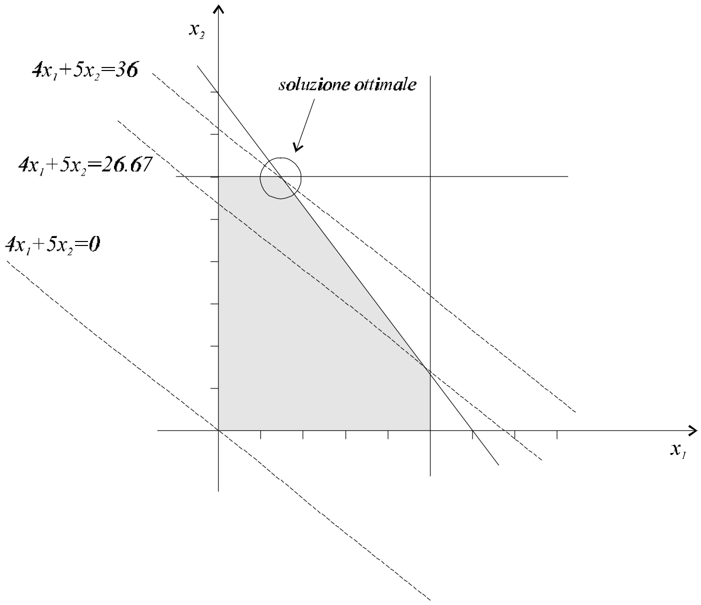

Fig. A.2 *Variazione del valore della funzione obiettivo $Z=4x_1+5x_2$ nel dominio dei valori accettabili di (x_1,x_2).*

Sfortunatamente tale procedimento grafico per più utilizzabile quando il numero di variabili è maggiore di tre. In questo caso è necessario un procedimento di risoluzione più generale chiamato *algoritmo del simplesso*. Si tratta di un procedimento algebrico che si avvicina progressivamente alla soluzione ottimale attraverso un processo iterativo finito. Alla base dell'algoritmo del simplesso c'è l'osservazione che la regione ammissibile, delimitata dai vincoli del problema ha la forma di un poliedro convesso. Si può facilmente dimostrare che il massimo della funzione è ottenuto in uno o più vertici di tale poliedro. Purtroppo però, anche se finito il numero di tali vertici può essere molto elevato e quindi la valutazione della funzione obiettivo in ognuno di essi potrebbe risultare molto onerosa. Tale necessità può essere comunque evitata; infatti per la convessità della regione ammissibile, quando in un vertice la funzione assume un valore superiore a quelli assunti in tutti i vertici adiacenti[5], allora il valore è quello massimo[6]. Le coordinate del vertice così trovato, costituiscono i valori ottimali delle variabili di decisione.
L'algoritmo del simplesso tende allora a ricercare tale vertice spostandosi di spigolo in spigolo in modo tale da incrementare ad ogni passo, fintanto che ciò sia possibile, il valore assunto dalla funzione obiettivo.
Lo sviluppo analitico di tale procedimento richiede la trasformazione del problema originale, come esso è stato presentato nel paragrafo precedente, nella seguente forma equivalente: trovare i valori di $x_1,x_2,\ldots,x_n$ che massimizzano la funzione lineare:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n ,$$

soggetta ai vincoli,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$

[5] Raggiungibili cioè attraverso un unico spigolo del poliedro.
[6] che può non essere unico se in altri vertici adiacenti il valore assunto dalla funzione è lo stesso

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + s_2 = b_2$

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + s_m = b_m$

e

x_1 ³ 0 , x_2 ³ 0 , ... , x_n ³ 0 ;
s_1 ³ 0 , s_2 ³ 0 , ... , s_m ³ 0 ;

In questa nuova formulazione del problema di ottimizzazione sono state introdotte le variabili s_i che sono appunto dette *variabili aggiunte*; tale formulazione è molto più adatta alla manipolazione algebrica.
Al sistema di disequazioni è stato sostituito un sistema di *m* equazioni in *n* incognite (*n*>*m*). È possibile a questo punto risolvere il sistema rispetto a *m* variabili, ponendo le rimanenti (*n-m*) pari a zero e trovando così una cosiddetta *soluzione di base* nelle *m* variabili di base. Formalmente il sistema globale

$$Ax + s = b$$

viene scomposto nella forma

$$Bx_b + Nx_n = b$$

in cui x_b è il vettore delle variabili di base, x_n è il vettore delle variabili non di base mentre *B* e *N* sono i due minori in cui viene scomposta la matrice *A*. La soluzione di base

$$x_b = B^{-1}\left(b - Nx_n\right)$$

è ottenuta ponendo $x_n=0$.
Quando i valori della soluzione di base rispettano i vincoli di non negatività delle variabili allora la soluzione è anche ammissibile.
Un'importante caratteristica delle soluzioni di base ammissibili è che ognuna individua un vertice del poliedro all'interno del quale è definito il problema e viceversa, per cui la ricerca del vertice in cui si ottiene il valore ottimo della funzione obiettivo si traduce nella ricerca della corrispondente soluzione di base ammissibile.
Per verificare se una soluzione di base ammissibile è quella ottimale, è sufficiente sostituire nella funzione obiettivo alle variabili di base i valori della soluzione trovata in funzione delle variabili non di base[7]. Si otterrà in questo modo un'espressione della funzione obiettivo in cui compaiono le sole variabili non di base[8]; se i coefficienti di queste sono tutti non positivi allora la soluzione è ottima in quanto in tal modo un incremento di queste variabili non può che far diminuire il valore della funzione.
Quando ciò non accade è necessario trovare un vertice, adiacente a quello della soluzione corrente, per il quale il valore della funzione sia superiore. Per far ciò è sufficiente far entrare nella base una delle variabili non di base facendone uscire una; la scelta delle due variabili da scambiare influenza l'efficienza della ricerca. Non si intende però in questa sede approfondire ulteriormente gli aspetti

---

[7] Per far ciò è necessario esplicitare, attraverso la tecnica di eliminazione di Gauss Jordan, le equazioni del sistema rispetto alle variabili di base.
[8] che sono state fissate a zero ma che potrebbero assumere valori maggiori facendo aumentare il valore della funzione obiettivo. Per questa ragione è sufficiente solo controllare che ciò possa o meno avvenire.

computazionali del metodo del simplesso per i quali rimandiamo alla letteratura specifica.
Aggiungiamo semplicemente che può essere delicata la soluzione di complicazioni che insorgono durante il calcolo vero e proprio come ad esempio quando esistano soluzioni multiple o quando non esistano soluzioni ottimali limitate o ancora quando non esistano affatto soluzioni accettabili. In questi casi possono essere attuati una serie di accorgimenti che consentono di superare le particolarità di calcolo; tali accorgimenti non sono però ne immediati ne banali per cui anche essi esulano dagli scopi del testo e quindi si rimanda alla letteratura specifica per il loro eventuale approfondimento.

- *Risoluzione del problema di pianificazione ottimale delle risorse*

L'applicazione del metodo del simplesso al problema presentato nel paragrafo precedente fornisce una soluzione ottimale riassunta nella seguente matrice di valori delle variabili di decisione

	A	*B*	*C*
1	*30*	*0*	*0*
2	*20*	*25*	*0*
3	*0*	*22.5*	*0*

Questi valori consentono di ottenere un valore della funzione obiettivo pari a *342.5* milioni.
Come si può notare tra i risultati un valore non è intero; esso quindi non riveste un senso reale. Un possibile approccio è quello di approssimare il valore con l'intero immediatamente minore interpretando euristicamente la soluzione analitica del problema. In questo caso però, in primo luogo il valore della funzione obiettivo non è più lo stesso ma scende a 341 milioni e soprattutto uno dei vincoli di proporzionalità[9] non è più soddisfatto. Quando una simile evenienza non è accettabile diventa necessario utilizzare una diversa tecnica di risoluzione, che analizzeremo nel seguito del capitolo e che consente di imporre anche vincoli di interezza alle variabili di decisione.
Tralasciando per il momento questo problema è invece importante notare un fatto: alcuni dei vincoli che definiscono il problema non sono saturati. Ad esempio il numero di operai specializzati impiegati è minore di quello disponibile; infatti nella prima filiale sono impiegati *30* operai su *40*, nella seconda *45* su *60* e nella terza *22* su *30*. Una cosa analoga accade per le attrezzature specifiche per i diversi indirizzi, anch'esse non utilizzate per la loro intera disponibilità.
Una cosa che in prima analisi può essere detta è che l'impresa può utilizzare i risultati ottenuti anche per riequilibrare il giusto rapporto di risorse a disposizione, alienando quelle in surplus.
Un'analisi più approfondita può porre però un'importante questione: quale sarebbe l'incremento di utile se invece di eliminare le risorse sovrabbondanti si decidesse di incrementare quelle saturate?
Per rispondere a tale quesito è necessario introdurre, cosa che faremo nel prossimo paragrafo, un nuovo aspetto della programmazione lineare noto come problema della dualità.

A.4 Dualità e analisi di sensibilità

Un importante concetto della programmazione lineare è quello di dualità. Esso può essere così sintetizzato: ad ogni problema di programmazione lineare è associato un altro problema di

[9] Il vincolo $(x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) - 2(x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}) = 0$ non è più soddisfatto in quanto il valore assunto dal primo membro è pari a *1*.

programmazione lineare chiamato problema duale la cui relazione con il problema originale (o primario) è molto profonda ed utile.
Consideriamo un problema di programmazione lineare nella sua forma canonica: trovare i valori di $x_1,x_2,...,x_n$ che massimizzano la funzione lineare

$Z_x = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$,

soggetta ai vincoli,

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$ £ b_1
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$ £ b_2
.
.
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n$ £ b_m

e

x_1 ³ 0 , x_2 ³ 0 , ... , x_n ³ 0 .

I1 problema duale corrispondente è ottenuto trasponendo le righe e le colonne dei coefficienti dei vincoli, nonché i coefficienti della funzione obiettivo e i secondi membri dei vincoli, invertendo le disuguaglianze e minimizzando invece di massimizzare. Possiamo allora esprimere il problema duale nel seguente modo: trovare i valori di $y_1,y_2,...,y_m$ che massimizzano la funzione lineare

$Z_y = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_ny_m$,

soggetta ai vincoli,

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m$ ³ c_1
$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m$ ³ c_2
.
.
$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_n$ ³ c_n

e

y_1 ³ 0 , y_2 ³ 0 , ... , y_m ³ 0 ;

I coefficienti del vincolo j-esimo del problema duale sono i coefficienti di x_j nei vincoli del problema primario, il secondo membro del vincolo j-esimo del problema duale è il coefficiente di x_j nella funzione obiettivo del problema primario, e viceversa. C'è quindi una variabile duale per ogni vincolo primario ed un vincolo duale per ogni variabile primaria.
Attraverso semplici considerazioni è possibile anche individuare il problema duale di problemi che non siano nella forma canonica.
Poiché il problema duale è esso stesso un problema di programmazione lineare, ha a sua volta un problema duale associato. È facile dimostrare che il problema duale del duale coincide con il problema primario.
Il problema primario e il suo duale sono legati dalla seguente importante relazione: nell'ipotesi che

esistano soluzioni limitate accettabili, esiste una soluzione ottimale finita per entrambi i problemi tale che i valori assunti dalle reciproche funzioni obiettivo (massimo nel primo caso e minimo nel secondo) sono uguali. Inoltre si può facilmente mostrare che la risoluzione del problema primario implica anche la risoluzione del problema duale.

La soluzione ottimale duale fornisce una interpretazione economica molto utile del problema primario. Il valore ottimale della *i*-esima variabile duale indica l'incremento del valore ottimale della funzione obiettivo del problema primario qualora fosse aumentata unitariamente, all'interno di un determinato intervallo, la disponibilità b_i della risorsa *i*-esima. L'intervallo è quello all'interno del quale la soluzione base ottimale originale rimane la stessa. I valori ottimali delle variabili del problema duale possono essere allora interpretati come i valori marginali delle risorse del problema primario. Incrementando ad esempio di un'unità la disponibilità della risorsa b_i, nell'ipotesi che la base ottimale resti la stessa, il risultante aumento nel profitto uguaglia il valore ottimale della variabile y_i.

Considerando il fatto che nei problemi pratici, i dati sono raramente conosciuti con certezza, è opportuno effettuare un'analisi di sensibilità per determinare l'effetto sul valore ottimale della funzione obiettivo di eventuali variazioni dei dati. Inoltre è importante valutare l'intervallo all'interno del quale possono essere variati i dati senza che la soluzione di base ottimale muti in modo che sia possibile ottenere il nuovo valore ottimale della funzione semplicemente inserendo in essa i nuovi valori delle variabili. È possibile effettuare tale valutazione senza grandi difficoltà.

Consideriamo ad esempio il caso in cui il coefficiente di x_j; nella funzione obiettivo, sia cambiato in un nuovo valore c'_j. È chiaro che la soluzione ottimale originale è ancora ammissibile poiché i vincoli sono immutati; essa però potrebbe non essere più ottimale. Per verificare ciò, è necessario analizzare l'effetto della variazione del valore del coefficiente. In effetti ci si può facilmente rendere conto che se tutti i calcoli fossero rifatti con c'_j al posto di c_j, il solo mutamento nel sistema finale di equazioni sarebbe la variazione del coefficiente di x_j della funzione obiettivo.

Nel caso in cui x_j sia una variabile non di base nella soluzione ottimale originale, per determinare se tale soluzione sia ancora quella ottimale è sufficiente, come già fatto nel problema originale, verificare che tutti i coefficienti delle variabili non di base della nuova funzione obiettivo siano non-negativi.

Inoltre poiché solo il coefficiente di x_j è cambiato, è necessario controllare solo se questo coefficiente sia ancora non-negativo; in caso affermativo, la soluzione è ancora ottimale, in caso contrario, diventa necessario fare entrare x_j in base e continuare col metodo del simplesso fino a che non sia identificata una nuova soluzione ottimale.

Nel caso invece in cui x_j sia una variabile di base, è necessario inserire un ulteriore passaggio nella procedura precedente prima di usare la nuova funzione obiettivo per provarne l'ottimalità.

Ricordiamo che questa prova richiede che tutte le variabili di base siano eliminate dall'equazione. Cambiando però c_j con c'_j, il coefficiente di x_j nell'equazione della funzione obiettivo non è più nullo; per cui l'ulteriore passaggio necessario è l'eliminazione attraverso sostituzione della variabile x_j. Dopo ciò, è possibile verificare nel solito modo l'ottimalità; se la verifica è negativa si ripartirà con il metodo del simplesso, dalla soluzione accettabile di base così raggiunta.

Altri tipi di variazioni dei dati possono pure essere controllati in modo abbastanza simile. In particolare, si possono trattare cambiamenti dei coefficienti b_i o a_{ij} , o l'aggiunta di nuovi vincoli o variabili o anche l'effetto di cambiamenti simultanei di diversi coefficienti. Tuttavia, la maggior parte di questi casi richiede una analisi più sofisticata di quella appena vista, cosicché per il loro approfondimento si rimanda alla letteratura specifica.

A.5 Programmazione a numeri interi[10]

Una caso particolare della programmazione lineare è quella in cui le variabili di decisione possono assumere soltanto valori interi. In molti problemi pratici infatti hanno senso solo valori interi delle variabili di decisione, come ad esempio nel caso in cui rappresentino unità lavorative o attrezzature[11].
Si parla in questo caso di programmazione lineare a valori interi; la ricerca della soluzione ottimale diventa con questo nuovo vincolo molto più complessa.
Si potrebbe a prima vista pensare di risolvere il problema utilizzando l'algoritmo del simplesso, come se le variabili fossero continue e sostituendo poi le soluzioni ottenute con quelle intere più vicine. La soluzione così trovata potrebbe però non essere ottimale o accettabile per cui sono state messe a punto tecniche diverse da quella del simplesso per la specifica risoluzione dei problemi di programmazione lineare a numeri interi. Prima di proseguire illustriamo attraverso un semplice esempio la natura dei problemi che devono essere affrontati.
Consideriamo il problema di massimizzare la funzione

$Z = x_1+5x_2$

soggetta ai vincoli

x_1+10x_2 £ 20
x_1 £ 2;

e

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, x_1 intero, x_2 intero.

Avendo solo due variabili decisionali, possiamo dare la rappresentazione grafica in figura A.3 al problema.

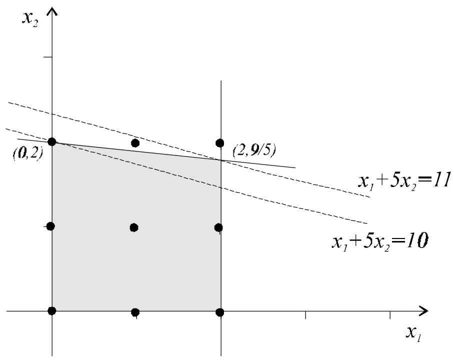

Fig. A.3 *La zona ombreggiata rappresenta la regione di ammissibilità dei valori di (x_1,x_2) mentre i punti evidenziano i valori interi delle variabili.*

[10] Una buona trattazione degli argomenti legati alla programmazione a numeri interi e alla relative tecniche di risoluzione può essere trovata in PAPADIMITRIOU C.H., STEIGLITZ K., *Combinatorial optimization-algorithms and complexity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1982
[11] Si consideri ad esempio l'applicazione studiata nel paragrafo A.2

La soluzione ottimale non intera è data dalla coppia di valori (*2,9/5*) per i quali la funzione obiettivo assume il valore *Z=11*. L'arrotondamento di tale soluzione al valore intero più vicino (*2,1*) porta il valore della funzione obiettivo a Z=7 molto lontano da quello precedente e dalla soluzione ottimale facilmente individuabile per via grafica nella coppia (*0,2*) per la quale l'obiettivo assume il valore *Z=10*.
Quando il numero di variabili non consente la interpretazione geometrica del problema diventa necessario utilizzare un procedimento analitico più generale che consenta di ottenere la soluzione.
Poichè il numero delle soluzioni accettabili intere è comunque finito è naturale pensare ad una tecnica che ne consenta un'esplorazione efficiente. Purtroppo il numero di soluzioni è generalmente molto grande per cui devono essere costruite procedure che riescano a trovare l'ottimo analizzando solo una piccola parte di queste.
Una tecnica che consente di attuare un'efficiente strategia di enumerazione è quella '*branch and bound*' della quale si espongono i passi principali.
Per procedere nella soluzione abbiamo bisogno di due registri di informazioni: il primo contiene una lista di sotto-problemi di programmazione; il secondo contiene la soluzione candidata come ottimale.
Per prima cosa si inizializza quest'ultimo registro individuando una qualsiasi soluzione ammissibile intera $\underline{x}$' e valutando il corrispondente valore della funzione obiettivo *Z'*.
Iniziamo a questo punto col risolvere il problema rimuovendo i vincoli di interezza delle variabili[12]. Qualora la soluzione del problema fosse già composta da valori tutti valori interi delle variabili di decisione il problema sarebbe ovviamente risolto. Quando invece ciò non accade si procede nel seguente modo. Indichiamo con x^*_j uno del valori non interi del problema di programmazione lineare a numeri reali ottenuto rimuovendo da quello originale i vincoli di interezza delle variabili.
Aggiungiamo a questo nuovo problema uno dei due vincoli:

$xj \leq \lceil x^*_j \rceil$ (parte intera superiore di x^*_j)

$xj \geq \lfloor x^*_j \rfloor$ (parte intera inferiore di x^*_j)

in modo da generare due nuovi problemi[13] caratterizzati dall'avere regioni ammissibili separate, dal contenere se considerati entrambi tutte le soluzioni ammissibili intere del problema e dall'escludere la soluzione reale del problema. Poniamo quindi questi due nuovi problemi nella lista di problemi ed escludiamo quello iniziale. Scegliamo a caso uno dei due problemi eliminandolo dalla lista affrontandolo allo stesso modo del problema originario.
Qualora la sua soluzione fosse migliore di $\underline{x}$' e intera, questa verrebbe conservata come soluzione candidata insieme al relativo valore della funzione obiettivo[14]. Il nuovo limite così stabilito consente di scartare immediatamente, oltre ai problemi che non danno soluzioni ammissibili o che danno soluzioni intere peggiori, tutti i sotto-problemi derivati da un problema la cui soluzione non intera, sia minore di tale limite.
Quando invece la sua soluzione fosse migliore di $\underline{x}$ ma con qualche variabile non intera, il problema verrebbe trattato come in precedenza suddividendolo in due nuovi problemi che verrebbero aggiunti alla lista.
In questo modo si tende a suddividere l'insieme delle soluzioni ammissibili in sottoinsiemi sempre più ristretti limitati sui valori interi delle variabili e per ognuno dei quali si calcola il valore limite assunto dalla funzione obiettivo.

[12] Utilizzando quindi l'algoritmo del simplesso.
[13] Questa operazione è detta 'branching' (ramificazione).
[14] Questa operazione è detta 'bounding' (delimitazione).

Si dimostra che se la regione ammissibile del problema originario è limitata, l'algoritmo converge alla soluzione in un numero finito di passi anche se questo può essere a volte molto elevato.
Per concludere possiamo confrontare la soluzione del problema della pianificazione degli impegni produttivi già innanzi risolto con la programmazione lineare a numeri reali.
Ricordiamo che in quel caso abbiamo ottenuto per le nove variabili i seguenti valori ottimali:

	A	*B*	*C*
1	*30*	*0*	*0*
2	*20*	*25*	*0*
3	*0*	*22.5*	*0*

con un valore della funzione obiettivo pari a *342.5* milioni.
Nel caso invece della soluzione a numeri interi si ottiene:

	A	*B*	*C*
1	*28*	*0*	*0*
2	*32*	*10*	*0*
3	*6*	*15*	*0*

con un valore della funzione obiettivo pari a *339* milioni.

A.6 La programmazione dinamica[15]

Il modello matematico più comune dei processi decisionali a più stadi è quello della programmazione dinamica.
Questa tecnica consente, sotto determinate ipotesi, di individuare la sequenza di decisioni correlate (politica decisionale) che ottimizza l'utilità complessiva di un problema a più stadi decisionali.
I problemi per i quali è possibile costruire un modello basato sulla programmazione dinamica devono avere le seguenti caratteristiche:

- *il problema si può dividere* in un numero *n* di *stadi* per ognuno dei quali è richiesta una decisione; gli stadi non corrispondono necessariamente a momenti temporalmente distinti ma identificano in generale differenti fasi logiche del processo decisionale.
- *Ad ogni stadio* è associato un numero di *stati* che rappresentano le diverse condizioni in cui il sistema analizzato può trovarsi in quello stadio.
- *La decisione presa* quando il sistema si trova in uno stato di un determinato stadio provoca una transizione dello stesso verso uno nuovo stato associato allo stadio successivo.
- *E' possibile definire una funzione* recursiva dell'utile $f_n(s,x)$ tale che sia possibile identificare la decisione ottimale per lo stato '*s*' nello stadio *x* attraverso la:

$$f_n^*(s) = \max/\min\left\{ f_n(s,x) \right\}$$

dove '*x*' è la variabile decisionale che assume valori interi con i quali si identificano le possibili alternative.

[15] Una buona trattazione e un'ampia casistica di applicazioni della tecnica della programmazione dinamica è contenuta in HILLIER F.S., LIEBERMAN G.J., *Introduzione alla ricerca operativa,* Franco Angeli, Milano 1994

In un determinato stadio la sequenza di decisioni presa per gli stadi precedenti non influenza quella da prendere per gli stadi successivi (proprietà di Markov).

Questa proprietà è alla base del principio di ottimalità di Bellman sul quale si basa la tecnica risolutiva della programmazione dinamica.

Questo principio afferma che per un processo che gode della proprietà di Markov, una politica ottimale è caratterizzata dal fatto che, le decisioni prese da un determinato stadio in poi costituiscono una politica ottimale per il sottoprocesso che inizia da quello stadio. Utilizzando questo principio si inizia col valutare dall'ultimo stadio a ritroso, stadio per stadio, per ciascuno stato la miglior politica per completare il processo dallo stato considerato servendosi dei risultati già ottenuti per lo stadio successivo. Gli utili ottimi parziali relativi all'ultimo stadio possono essere calcolati direttamente mentre gli utili del generico stadio successivo '*i*' sono ottenuti recursivamente come funzione di quelli dello stadio '*i+1*'. La forma tipica della funzione recursiva dell'utile è:

$$f_n^*(s) = \max\left\{ f_n(s,x) + f_{n+1}^*(x) \right\}$$

Quando l'ottimo è ottenuto per più valori della '*x*' è possibile scegliere arbitrariamente tra questi. La soluzione del problema è descritta da un vettore di decisioni ottimali ottenuto ripercorrendo in avanti tutta la sequenza decisionale che conduce all'utile ottimo.

Al fine di chiarire i concetti alla base della tecnica della programmazione dinamica utilizziamo un classico esempio applicativo.

- *Ricerca del percorso più breve tra due punti*

Il problema è quello di individuare il percorso più breve tra due punti, avendo a disposizione un elevato numero di percorsi diversi.

Affinchè sia possibile applicare il procedimento della programmazione dinamica possiamo schematizzare il problema nel seguente modo.

Siano *A* e *L* rispettivamente il punto di partenza e quello di arrivo, consideriamo i diversi percorsi tra *A* e *L* suddivisi in tante tappe la cui accessibilità reciproca è evidenziata nel grafo della figura A.4.

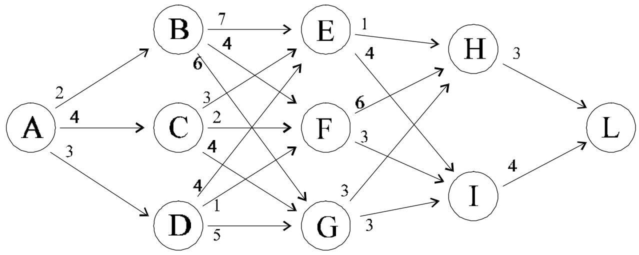

Fig. A.4 *Grafo dei possibili itinerari e distanze tra i punti A e L.*

Come si può già notare a prima vista le tappe sono raggruppate in modo che in ogni gruppo non vi sia accessibilità reciproca; ciò consente di individuare i *4* stadi del problema ognuno dei quali individua una scelta di percorso.

Nella stessa figura sono anche riportate le distanze tra le diverse possibili tappe del viaggio.

Un possibile approccio potrebbe essere quello dell'enumerazione combinatoria di tutti i possibili itinerari per ognuno dei quali viene calcolata la lunghezza al fine di scegliere quello più breve.

Già però in questo semplice caso il numero delle combinazioni possibili è pari a *18* esso può inoltre

salire vertiginosamente in casi un po' più complessi.
Un altro approccio che potrebbe essere escogitato con una analisi poco approfondita può essere quello scegliere, partendo dal punto iniziale, il percorso ad ogni tappa minore.
In questo caso avremmo come soluzione l'itinerario [A,B,F,I,L] la cui lunghezza è pari a 13.
Diventa però evidente ad un'analisi più approfondita che un sacrificio in uno stadio può permettere poi minori distanze totali da percorrere[16].
La programmazione dinamica, applicabile in questo caso in quanto tutte le condizioni richieste sono soddisfatte, offre un procedimento molto efficiente di risoluzione che analizziamo.
Scegliamo come variabili di decisione x_n le scelte di percorso nei diversi stadi in modo tale che il percorso sia individuato dalla sequenza di decisioni [x_1,x_2,x_3,x_4].
È immediato intanto stabilire che sarà per forza di cose $x_4=L$. Per le altre decisioni utilizziamo la funzione recursiva

$$f_n^*(s) = \min\left\{ f_n(s,x) + f_{n+1}^*(x) \right\}$$

che descrive il minimo percorso dallo stadio n all'arrivo in funzione dello stato s. Il valore della funzione per l'ultimo stadio avremo allora:

$f^*_4(H)=3$, con $x_4=L$;
$f^*_4(I)=4$, con $x_4=L$;

per il terzo stadio:

$f^*_3(E)=min\{1+ f^*_4(H),4+ f^*_4(I)\}=4$, con $x_3=H$;
$f^*_3(F)=min\{6+ f^*_4(H),3+ f^*_4(I)\}=7$, con $x_3=I$;
$f^*_3(G)=min\{3+ f^*_4(H),3+ f^*_4(I)\}=6$, con $x_3=H$;

per il secondo stadio:

$f^*_2(B)=min\{7+ f^*_3(E),4+ f^*_4(F),6+ f^*_4(G)\}=11$, con $x_2=E$ *o* F;
$f^*_2(C)=min\{3+ f^*_3(E),2+ f^*_4(F),4+ f^*_4(G)\}=7$, con $x_2=E$;
$f^*_2(D)=min\{4+ f^*_3(E),1+ f^*_4(F),5+ f^*_4(G)\}=8$, con $x_2=E$ *o* F;

per il primo stadio:

$f^*_1(A)=min\{2+ f^*_3(B),4+ f^*_4(C),3+ f^*_4(D)\}=11$, con $x_2=C$ *o* D;

A questo punto è semplice ricostruire gli itinerari ottimali ponendo in sequenza le decisioni che portano al valore ottimale pari a 11 della lunghezza del tragitto da A a L.

In questo caso abbiamo delle alternative diverse ogni volta che la decisione ottimale non è univoca; per cui gli itinerari ottimali sono quelli rappresentati in figura A.5:

[A,C,E,H,L], [A,D,E,H,L], [A,D,F,I,L].

---

[16] Ad esempio il percorso [A,D,F] è più conveniente di [A,B,F]

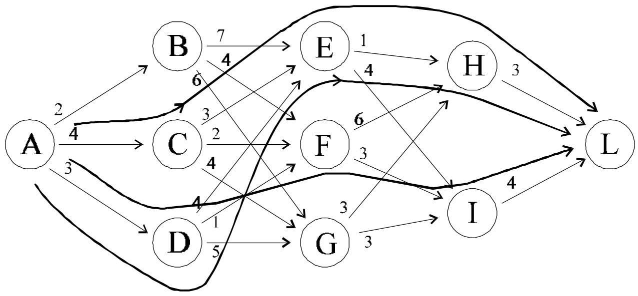

Fig. A.5 *Visualizzazione degli itinerari ottimali tra i punti A e L.*