
Cenni di calcolo probabilistico

B.1 Introduzione

L'incertezza è un elemento che caratterizza la maggior parte delle situazioni decisionali reali; essa è in genere causata dalla variabilità intrinseca nei fenomeni che influenzano il risultato di una decisione o dalla scarsa conoscenza del contesto legata ad esempio alla difficoltà pratica di valutare gli elementi osservabili dei fenomeni.

La probabilità è una rappresentazione matematica dell'aleatorietà che esprime una quantificazione della possibilità che un determinato evento possa avvenire. Il senso di tale quantificazione non è banale né univoca, tant'è che sulla base della sua evoluzione è possibile ricostruire la storia della teoria della probabilità nelle sue diverse impostazioni. La prima definizione data al concetto di probabilità, intorno alla fine del '700, è nota come definizione classica; essa definisce la probabilità come il rapporto tra il numero dei risultati favorevoli di un evento e il numero dei risultati possibili purchè ugualmente probabili. A parte la possibilità di utilizzare tale definizione solo per la ristretta classe di problemi in cui si può ipotizzare che gli eventi siano equiprobabili¹, la definizione classica presenta il grave difetto di essere circolare in quanto in essa si utilizza il concetto di equiprobabilità che contiene il concetto che si vuole definire. L'eventuale verifica di equiprobabilità potrebbe essere effettuata solo attraverso l'esperienza verificando su un esteso campione di risultati che questi si dividono in proporzioni uguali tra quelli possibili. In effetti un simile approccio apre la strada alla definizione frequentista del concetto di probabilità che come però vedremo non è priva di inconvenienti. La definizione frequentista lega appunto il concetto di probabilità a quello di rapporto di frequenza tra i risultati favorevoli all'evento considerato e il numero totale dei risultati quando questo tende all'infinito. Con questa impostazione ci si svincola dall'ipotesi di equiprobabilità considerando quindi anche la possibilità che alcuni eventi siano più probabili di altri; la necessità però di dover disporre di dati per definire la probabilità degli eventi costituisce il limite di tale approccio. Infatti il valore della probabilità così definito richiede l'effettuazione, non sempre possibile, di un numero elevato di prove; inoltre in molti casi i dati potrebbero non essere significativi a causa di variazioni in corso nel contesto o ancora i risultati possibili potrebbero tendere all'infinito con la conseguente difficoltà di costruzione del rapporto di frequenza per ognuno di essi.

I limiti dell'impostazione frequentista possono essere superati con una definizione che faccia risalire il concetto di probabilità alla misura di un'opinione soggettiva. Tale impostazione detta appunto soggettiva² è adatta soprattutto ai casi in cui ci si occupi alla probabilità di un singolo evento non

¹ Questa definizione può perciò essere applicata per descrivere il risultato del lancio di un dado ma non può essere applicata se il dado fosse ad esempio truccato.

² Il riferimento di base per l'impostazione soggettiva della probabilità è il libro in due volumi di DE FINETTI B., *Teoria delle probabilità*, Ed. Einaudi, Torino, 1970; per una più immediata trattazione e esemplificazione di tale approccio si può invece consultare SCOZZAFAVA R., *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Masson,

2 Corso di Organizzazione del Cantiere

riproducibile. In simili casi, si ritiene infatti che una conoscenza soggettiva dei fatti sia meglio che il non conoscerli affatto. Le probabilità definite soggettivamente hanno il carattere di ipotesi sul futuro esse però poter costituire la base di una teoria coerente devono soddisfare ad alcune proprietà matematiche. Su queste proprietà è anzi basato l'approccio più diffuso, indicato come assiomatico, che escludendo ogni elemento di ambiguità concettuale si limita semplicemente a enunciare tali proprietà sotto forma di postulati:

la probabilità di un evento è un numero positivo;

la probabilità dell'evento certo è uguale all'unità;

se due eventi si escludono a vicenda allora la loro probabilità congiunta è uguale alla somma delle reciproche probabilità; questa proprietà vale inoltre anche nel caso in cui gli eventi mutuamente esclusivi siano più di due.

L'impostazione assiomatica della teoria delle probabilità è basata solo su questi tre postulati; la sua caratteristica fondamentale è proprio quella di porre in evidenza solo l'aspetto deduttivo e rigoroso della teoria³.

La modellizzazione di un fenomeno è costituito da tre fasi; in primo luogo occorre assegnare ai diversi eventi le rispettive probabilità successivamente, sulla base di questi dati e utilizzando i teoremi della teoria delle probabilità, vengono calcolate le probabilità di altri eventi collegati ai primi; infine questi valori possono essere utilizzati per effettuare predizioni a priori sugli eventi futuri.

Ciò che è importante notare è che la seconda fase non perde la propria validità se le probabilità assegnate agli eventi sono state stimate erroneamente. Per l'assegnazione delle probabilità agli eventi è quindi possibile utilizzare tanto considerazioni aprioristiche, di tipo classico, tanto considerazioni frequentistiche che soggettivistiche.

B.2 Elementi di calcolo combinatorio

Se lo spazio degli eventi possibili è composto da n eventi mutuamente esclusivi e tali che possano essere ragionevolmente ritenuti equiprobabili allora ad ognuno di essi può essere associata una probabilità pari a $p=1/n$ e all'evento composto dall'unione di h eventi fra gli n possibili la probabilità $p=h/n$.

In molti problemi pratici non è immediata la valutazione dei numeri h ed n ma sono necessarie considerazioni di tipo combinatorio sulle quali soffermiamo in questo paragrafo brevemente la nostra attenzione.

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio può essere enunciato nel seguente modo: se una procedura può essere realizzata in n_1 modi diversi, una seconda procedura altri n_2 modi diversi e così via fino all' n -esima procedura realizzabile in n_n modi diversi allora la procedura composta da una qualsiasi sequenza delle n procedure può essere realizzata in $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_n$ modi diversi.

Ad esempio calcoliamo il numero di parole di 4 lettere di cui la prima sia una consonante diversa da 'h', la seconda una vocale la terza una consonante e l'ultima ancora una vocale.

Considerando le lettere tipiche dell'alfabeto italiano abbiamo 15 possibilità per la prima posizione 5 per la seconda, 16 per la terza e 5 per la quarta. Il numero di parole è allora $N=15 \times 5 \times 16 \times 5 = 6000$.

Se non fossero stati posti vincoli, utilizzando quindi tutte le possibili lettere per le diverse posizioni avremmo avuto $N=21 \times 21 \times 21 \times 21 = 194481$ parole possibili. In generale il numero di possibili modi di composizione avendo a disposizione r procedure ognuna con n modi diversi è $N=n^r$.

Milano, 1993

³ Un buon testo di riferimento basato sull'impostazione assiomatica è il classico PAPOULIS A., *Probability, Random variables and Stochastic processes*, McGraw Hill, New York, 1965.

È possibile aggiungere vincoli ai modi di comporre le procedure.

Possiamo ad esempio considerare i gruppi di r elementi ognuno ancora estratto tra possibili n ma in modo tale che all'interno della composizione non compaiano mai due elementi uguali. In questo caso la composizione si dice *disposizione* di ordine r in un insieme di n elementi. In pratica due disposizioni sono diverse se differiscono per almeno un elemento o per l'ordine di questi.

Il numero di siffatte disposizioni è dato dalla seguente formula:

$$D(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Riprendendo l'esempio precedente le parole che è possibile comporre con 4 lettere ognuna delle quali può essere scelta tra tutte le 21 possibili ma in modo che nella parola non compaiano 2 lettere uguali è:

$$D(21, 4) = \frac{21!}{17!} = 143640$$

La differenza rispetto al numero trovato in precedenza (194481) indica che 50841 parole presentano almeno due lettere uguali.

La particolare disposizione di ordine n in un insieme di n elementi prende il nome di *permutazione*; il numero di permutazioni è:

$$P(n) = n!$$

Considerando ancora gruppi di r elementi tra loro diversi estratti da un insieme di n senza per i quali però non si tenga in considerazione l'ordine, nel senso che due gruppi contenenti gli stessi elementi ma in ordine diverso sono considerati uguali. In questo caso si parla di *combinazioni*. Il numero di combinazioni è:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Il termine $\binom{n}{r}$ è detto coefficiente binomiale ed è molto spesso utilizzato per abbreviare la formula vista.

B.3 Le operazioni fondamentali del calcolo delle probabilità

Una rappresentazione efficace degli eventi è quella insiemistica. Se indichiamo con S l'insieme di tutti gli eventi possibili, detto spazio campione, possiamo descrivere, come è mostrato nella figura B.1 l'evento A al quale è associata la probabilità $P(A)$ attraverso il sottoinsieme di S che comprende tutti gli elementi che condividono la determinata proprietà che caratterizza l'insieme stesso. La probabilità dell'evento A^* complementare⁴ di A è

$$P(A^*) = 1 - P(A)$$

⁴ Contenente tutti gli elementi non appartenenti ad A .

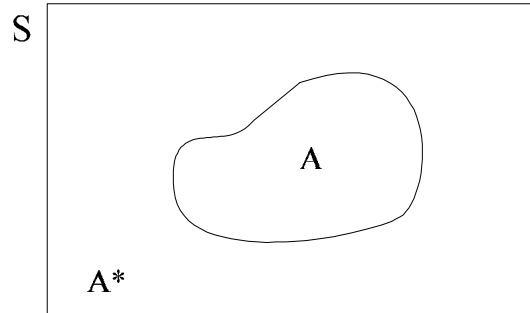


Fig. B.1 Rappresentazione dell'evento A e del suo complementare A^* come sottoinsiemi dello spazio campionario S .

La probabilità dell'evento unione di più eventi è definita assiomaticamente nel caso in cui gli eventi siano mutuamente esclusivi. Vediamo come la probabilità dell'insieme unione cambia quando gli eventi non sono mutuamente esclusivi ma hanno alcuni elementi in comune che dal punto di vista insiemistico ne rappresentano l'intersezione. Per semplicità studiamo il caso di due soli eventi, rappresentati in figura B.2, A e B la cui intersezione $A \cap B$ è diverso dall'insieme vuoto.

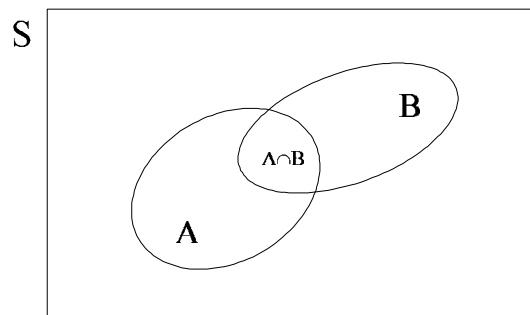


Fig. B.2 Rappresentazione insiemistica dell'evento intersezione ($A \cap B$).

La semplice somma delle probabilità dei due eventi porterebbe a contare due volte l'insieme intersezione; è quindi necessario che questo venga sottratto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

dove $P(A \cap B)$ è detta probabilità congiunta degli eventi A e B .

Approfondiamo il senso di questa formula attraverso un semplice esempio.

Il fornitore di materiali edili offre la possibilità di scegliere tra una grossa partita di piastrelle di prima scelta a £ 500 cadauna e una di seconda scelta a £ 470 cadauna.

A causa di un incorretto stoccaggio, per la partita di prima scelta c'è la probabilità pari al 10% di avere piastrelle scheggiate; per la partita di seconda scelta tale probabilità rimane immutata ma ad essa si aggiunge la probabilità del 10% di avere piastrelle dal colore non uniforme.

Supponendo di utilizzare solo le piastrelle che non presentano difetti di alcun tipo, si valuti quale alternativa è probabilisticamente più conveniente.

Possiamo stimare due situazioni limite all'interno delle quali si collocherà la probabilità di ottenere piastrelle utilizzabili. Nel caso in cui gli eventi di scheggiatura (A) e colorazione non uniforme (B) fossero completamente disgiunti la probabilità di elementi difettosi sarebbe pari a:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.1+0.1=0.2$$

Nel caso in cui invece gli eventi fossero completamente sovrapposti la probabilità cercata sarebbe pari a:

$$P(A+B)=P(A\cap B)=0.1$$

Possiamo a questo punto valutare il costo netto delle piastrelle buone, nel seguente modo:

$$C^*=C/[1-P(A+B)]$$

dove C è il costo lordo, pagato per l'intera partita e $(1-P(A+B))$ è la frazione probabile di piastrelle buone.

Nel caso della prima scelta il costo diventa:

$$C^*=500/0.9=555.5$$

Nel caso della seconda scelta il costo varia tra:

$$C_1^*=470/0.9=522.2 \quad e \quad C_2^*=470/0.8=587.5$$

Il costo netto delle piastrelle della partita di prima scelta si colloca nell'intervallo di variabilità del costo netto della seconda scelta.

Senza altre informazioni o ipotesi non sembra quindi possibile rispondere al quesito. Tutto dipende dalla entità dell'insieme intersezione tra l'evento A e l'evento B .

In generale la probabilità intersezione può essere espressa come probabilità di ottenere l'evento A una volta che sia vero l'evento B o viceversa come probabilità di ottenere l'evento B una volta che sia vero l'evento A . Com'è ovvio i due modi di stimare la probabilità intersezione non possono che essere equivalenti; formalmente ciò si esprime nel modo seguente:

$$P(A\cap B)=P(B/A)\cdot P(A)=P(A/B)\cdot P(B)$$

dove $P(B/A)$ è la probabilità dell'evento B condizionata all'evento A (letta probabilità di B dato A) e $P(A/B)$ è la probabilità dell'evento A condizionata all'evento B .

Se i due eventi A e B sono del tutto indipendenti si può supporre che la proporzione tra piastrelle mal colorate e piastrelle scheggiate rimanga immutata se calcolata sull'intera partita o sulla sola parte di piastrelle scheggiate; ciò si esprime formalmente nel seguente modo:

$$P(B/A)=P(B) \quad e \quad P(A/B)=P(A)$$

Posta l'indipendenza degli eventi la probabilità intersezione è quindi ottenuta come:

$$P(A\cap B)=P(B/A)\cdot P(A)=P(A/B)\cdot P(B)=P(A)\cdot P(B)$$

Nel caso specifico dell'esempio l'ipotesi che i due eventi A e B siano indipendenti è plausibile in quanto si può supporre che le piastrelle dalla colorazione non accettabile siano distribuite uniformemente negli imballaggi della partita e che quindi la parte di quest'ultime contemporaneamente scheggiate (più

6 Corso di Organizzazione del Cantiere

probabilmente quelle esterne negli imballaggi) sia proporzionale alla percentuale totale. Possiamo allora stimare la probabilità di piastrelle non utilizzabili:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.1 + 0.1 - 0.01 = 0.19$$

Il costo delle piastrelle di seconda scelta è quindi nell'ipotesi di indipendenza degli eventi pari a:

$$C^* = 470 / 0.81 = 580.2$$

Ciò rende la partita di piastrelle di prima scelta probabilisticamente più economica di quella di seconda scelta.

Nella figura B.3 è raffigurato un esempio di eventi indipendenti per i quali, come si può facilmente verificare, sono valide le relazioni sopra espresse.

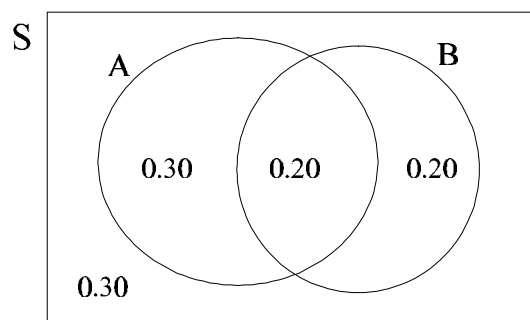


Fig. B.3 Un esempio numerico di eventi A e B indipendenti per i quali vale la relazione $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Nel seguente esempio si utilizza praticamente il concetto di indipendenza degli eventi.

Calcolo di probabilità nell'ipotesi di eventi indipendenti

La probabilità di trovare, in un istante scelto casualmente durante la giornata lavorativa, un manovale di una squadra non occupato è pari al 10%; si valuti la probabilità di trovare ancora in un istante scelto casualmente almeno un operaio libero quando nel cantiere siano presenti 6 squadre.

È bene evidenziare che tale probabilità non è ottenuta come somma delle probabilità che un operaio sia libero per ognuna delle squadre, nel qual caso si avrebbe il valore 0.6^5 . Per risolvere il problema è invece necessario notare che si vuole calcolare la probabilità dell'unione di 6 eventi (operaio libero in ognuna delle 6 squadre) e che quindi alla somma devono essere detratte tutte le sovrapposizioni che altrimenti verrebbero computate più volte. Fare ciò quando gli eventi sono più di due può comportare un certo peso di calcolo; il calcolo può invece essere semplificato notando che globalmente gli eventi di interesse sono due: 'nessun operaio libero' e 'almeno un operaio libero'. Possiamo calcolare allora la probabilità cercata come complementare a uno dell'evento 'nessun operaio libero'. Per far ciò basta calcolare la

⁵ che questa non sia la soluzione del problema è anche evidenziato dall'assurdo che si otterrebbe qualora il numero delle squadre fosse maggiore di 10, nel qual caso si avrebbero valori maggiori dell'unità

probabilità intersezione tra i 6 eventi corrispondenti alla completa occupazione dei manovali ognuno indipendente dagli altri e con probabilità pari a 0.9:

$$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5) \cdot P(A_6) = 0.9^6 = 0.531$$

Il complementare a tale valore contraddistingue il caso in cui almeno un manovale sia libero, per cui il valore cercato è:

$$P = 1 - 0.531 = 0.469$$

B.4 La revisione delle probabilità degli eventi: il teorema di Bayes

Abbiamo visto che la probabilità dell'evento intersezione degli eventi A e B può essere espressa come:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Le relazioni tra le probabilità condizionate sono dunque:

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$$

Questa relazione è conosciuta con il nome di teorema di Bayes; essa può essere esplicitata rispetto ad una serie di eventi mutuamente esclusivi $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ la cui unione coincide con lo spazio campionario. Come mostrato nella figura B.4, la probabilità $P(A)$ può essere espressa nella forma:

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n)$$

Scegliendo $B = H_i$ si ottiene:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|H_j) \cdot P(H_j)}$$

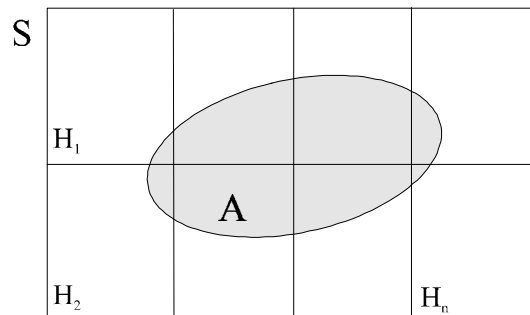


Fig. B.4 L'evento A interseca gli eventi H_j in proporzioni diverse. Il rapporto tra la probabilità dell'intersezione $P(H_j \cap A)$ e $P(A)$ è il valore di $P(H_j|A)$.

Questa formulazione si può interpretare come la valutazione della probabilità di una possibile causa H_i ,

dato un effetto osservato A .

Per far ciò è necessario conoscere le probabilità iniziali di tutte le possibili cause H_j , e quelle che l'effetto A ha di essere associato alle diverse cause H_j . Possiamo specializzare questa interpretazione intendendo l'evento A come il risultato di un esperimento e le probabilità di A condizionate ai diversi eventi H_j come le affidabilità dell'esperimento stesso, ossia le probabilità cioè che l'esperimento fornisca il risultato A quando sia vero l'evento generico H_j . Chiariamo attraverso un semplice esempio questa utile interpretazione del teorema di Bayes.

Influenza di una prova sperimentale sulle probabilità associate agli eventi

Nella zona dove deve essere effettuata una trivellazione per la realizzazione di un pozzo artesiano, in condizioni analoghe è stata trovata la falda nel 60% delle perforazioni effettuate. È possibile indirizzare la trivellazione utilizzando le informazioni di un raddomante i cui risultati ottenuti in passato possono essere riassunti nel seguente modo: quando la falda era effettivamente presente la previsione è stata giusta nel 70% dei casi mentre quando la falda era assente la previsione è stata giusta nell'80% dei casi. Indicando con A l'evento 'presenza della falda', con B l'evento 'assenza della falda', con q_1 il risultato affermativo della prova del raddomante sulla presenza della falda e infine con q_2 il risultato negativo, possiamo sintetizzare l'affidabilità del raddomante nei seguenti valori:

$$P(q_1/A)=0.70; P(q_2/A)=0.30; P(q_1/B)=0.20; P(q_2/B)=0.80.$$

Possiamo a questo punto calcolare come variano i valori iniziali di $P(A)=0.60$ e $P(B)=0.40$, in funzione del parere del raddomante.

Vediamo dapprima il caso in cui la risposta sia affermativa:

$$P(A|q_1) = \frac{0.70 \cdot 0.60}{0.70 \cdot 0.60 + 0.20 \cdot 0.40} = 0.84$$

$$P(B|q_1) = \frac{0.20 \cdot 0.40}{0.70 \cdot 0.60 + 0.20 \cdot 0.40} = 0.16$$

Nel caso invece in cui la risposta sia negativa abbiamo:

$$P(A|q_2) = \frac{0.30 \cdot 0.60}{0.30 \cdot 0.60 + 0.80 \cdot 0.40} = 0.36$$

$$P(B|q_2) = \frac{0.80 \cdot 0.40}{0.30 \cdot 0.60 + 0.80 \cdot 0.40} = 0.64$$

Come si può vedere il parere affermativo sulla presenza della falda porta la probabilità che questa sia poi effettivamente trovata nel punto indicato al valore molto elevato dell'84%. Il parere negativo invece non è così determinante, a causa soprattutto della maggiore probabilità iniziale della presenza della falda. È anche possibile valutare la probabilità che il raddomante interrogato su un punto fornisca un parere affermativo o negativo; utilizzando infatti le probabilità iniziali $P(A)$ e $P(B)$ e le affidabilità del raddomante si ottiene:

$$P(q_1) = P(q_1/A)P(A) + P(q_1/B)P(B) = 0.70 \times 0.60 + 0.20 \times 0.40 = 0.50$$

$$P(q_2) = P(q_2/A)P(A) + P(q_2/B)P(B) = 0.30 \times 0.60 + 0.80 \times 0.40 = 0.50$$

Si può quindi concludere che per ogni esperimento, la probabilità di un parere affermativo e quella di un parere negativo si equivalgono.

B.5 Variabili casuali e distribuzioni di probabilità

Possiamo pensare di definire una funzione che associ ad una famiglia di eventi E un'immagine numerica $X(E)$; una tale funzione è chiamata *variabile aleatoria*⁶. Se $X(E)$ è una variabile aleatoria sullo spazio campionario E composto di eventi mutuamente esclusivi, la funzione che assegna ad ogni valore di X la probabilità dell'evento corrispondente è detta *distribuzione di probabilità*. Quando la variabile aleatoria è discreta la distribuzione è anch'essa detta discreta, quando invece la variabile aleatoria è continua, la distribuzione è detta continua. Un esempio di distribuzione discreta di probabilità è raffigurato nella figura B.5.

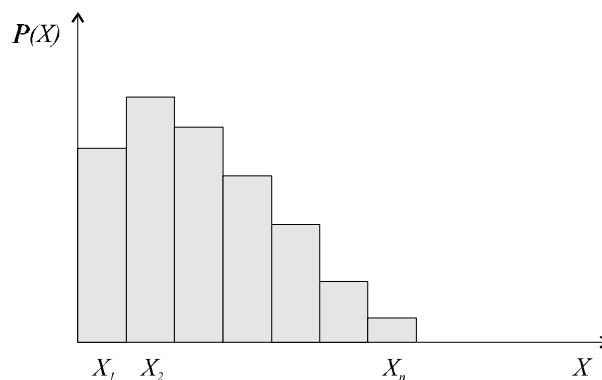


Fig. B.5 Un esempio di distribuzione discreta di probabilità della variabile aleatoria X . La somma dell'area di tutti i rettangolini è pari all'unità.

Nel caso di distribuzioni continue non ha senso parlare di probabilità associata ad un determinato evento; il fatto che questi non siano un numero finito fa sì che la probabilità di ogni evento sia infatti nulla.

Per distribuzioni continue la funzione distribuzione $F(X)$ ³⁰ è tale che sia:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b F(X) dX$$

dove $\int_{-\infty}^{+\infty} F(X) dX = 1$.

In altri termini nel caso di distribuzioni continue ha senso parlare di probabilità che un evento sia

⁶ Nel più semplice dei casi possiamo ad esempio pensare che la famiglia di eventi sia costituita dalle facce di un dado e che la variabile aleatoria sia 1 quando il valore della faccia è dispari e 0 quando invece il valore della faccia è pari.

10 Corso di Organizzazione del Cantiere

compreso all'interno di un determinato intervallo; la funzione distribuzione è tale da definire attraverso il suo integrale il valore di tale probabilità.

Il momento del primo ordine della distribuzione è detto *valore atteso* o *speranza matematica* e nel caso di distribuzione discreta è determinato dalla seguente formula:

$$\mathbf{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x \cdot p(x)}{\sum_{i=1}^n p(x)} = \sum_{i=1}^n x \cdot p(x)$$

mentre nel caso di distribuzione continua la sommatoria sarà opportunamente sostituita l'integrale esteso a tutto il dominio.

Il valore atteso corrisponde al valore che divide la distribuzione in due parti tali che la somma delle probabilità degli eventi posti da una parte sia uguale alla somma delle probabilità degli eventi posti dall'altra. Il valore atteso non coincide generalmente con il valore per cui la distribuzione attinge al suo valore massimo.

Il momento del secondo ordine della distribuzione è detto *varianza* della distribuzione e fornisce una informazione sulla dispersione della distribuzione rispetto al valore atteso. Il valore della varianza è ottenuto attraverso la seguente formula:

$$\mathbf{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x - \mathbf{m})^2 \cdot p(x)}{\sum_{i=1}^n p(x)} = \sum_{i=1}^n x^2 p(x) - \mathbf{m}^2$$

Anche qui, nel caso di distribuzione continua sarà necessario sostituire la sommatoria con il corrispondente integrale.

La radice della varianza detta *scarto quadratico medio* \mathbf{s} ; questo termine consente di riportare la misura della dispersione nella stessa unità di misura della variabile casuale.

Vediamo nel seguito le forme assunte da alcune tra le più importanti distribuzioni discrete di probabilità:

Distribuzione binomiale o di Bernoulli

Consideriamo n prove ripetute indipendenti di un esperimento con due possibili esiti che definiamo 'successo' e 'insuccesso' il primo con probabilità ad ogni prova pari a p . La distribuzione binomiale descrive la probabilità rispetto alla variabile aleatoria ' $k = \text{numero di successi}$ '.

Formalmente la probabilità di avere k successi con n esperimenti, ognuno con probabilità di successo pari a p è:

$$b(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Il valore atteso della distribuzione binomiale è $\mathbf{m} = np$ mentre la varianza è $\mathbf{s}^2 = np(1 - p)$.

Campionatura di una partita di una fornitura

Attraverso la distribuzione binomiale è possibile descrivere le probabilità associabili ai risultati della campionatura di un prodotto. Ad esempio estraendo 20 esemplari da un esteso campione⁷ di piastrelle caratterizzato da una difettosità pari al 5%, è possibile descrivere la probabilità di estrarre un numero k piastrelle difettose come una distribuzione binomiale del tipo:

$$b(k, 20, 0.05) = \binom{20}{k} 0.05^k 0.95^{20-k}$$

raffigurata graficamente in figura B.6 per valori della variabile aleatoria k inferiori di 5; oltre tale valore la distribuzione assume infatti valori praticamente nulli.

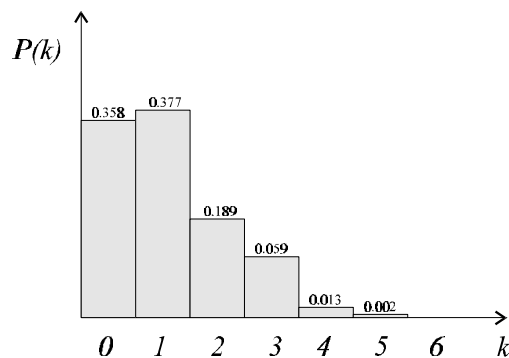


Fig. B.6 Andamento della distribuzione binomiale $b(k, 20, 0.05)$.

Come si può vedere la probabilità di non estrarre alcun esemplare difettoso con una campionatura di 20 elementi è molto elevata (35.8%).

- Affidabilità di una operazione complessa

Vediamo un'altra semplice applicazione della distribuzione binomiale utilizzandola per stimare l'affidabilità di un'operazione composta da 12 operazioni elementari che devono essere tutte portate a termine con successo affinché l'intera operazione complessa possa produrre il risultato desiderato. Supponendo che la probabilità che la generica operazione elementare non sia svolta correttamente sia per tutte pari al 5%, possiamo trovare la probabilità cercata come:

$$b(0, 12, 0.04) = \binom{12}{0} 0.04^0 0.96^{12} = 0.613$$

Si ottiene quindi una probabilità relativamente bassa (61.3%) che l'operazione sia portata correttamente

⁷ In modo che dopo ogni estrazione la percentuale di difettosità risulti sostanzialmente invariata.

12 Corso di Organizzazione del Cantiere

a termine. Nel caso invece in cui sia concessa una determinata tolleranza, ad esempio sia ammissibile la non corretta esecuzione al massimo di una sola operazione, la probabilità può essere trovata come somma dei due termini: $b(0,12,0.04)+b(1,12,0.04) = 0.613+0.306 = 0.919$ e come si può notare esso diventa molto più elevato (91.9%).

Distribuzione di Poisson

Supponiamo che un dato evento (guasto, errore, impegno di risorsa) si ripeta mediamente un certo numero I di volte in un dato intervallo di tempo T . Se consideriamo ora il dominio temporale costituito da n intervalli uguali T , la probabilità che k eventi vengano a cadere nel singolo intervallo può essere ricavata interpretando il problema come un esempio di n prove ripetute e indipendenti in ognuna delle quali si dispongono I eventi casualmente ottenendo un successo quando uno di questi cade in un prescelto intervallo elementare. La probabilità di successo ad ogni esperimento è ovviamente $p=I/n$ e la probabilità di k successi è:

$$b(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

si dimostra che con $np=I$, per $n \rightarrow \infty$ e quindi per $p \rightarrow 0$ si ottiene⁸:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(k,n,p) = \frac{I^k}{k!} e^{-I} = p(k,I)$$

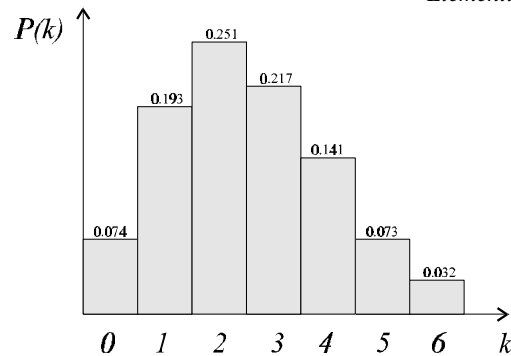
La distribuzione $p(k,I)$ è detta distribuzione di Poisson e il suo valore atteso è $m=I$ come pure quello della varianza è $s^2 = I$. La distribuzione di Poisson è molto utilizzata per esprimere, come mostrato nell'esempio successivo, le probabilità che k degli eventi di una famiglia di I elementi distribuita in modo totalmente casuale nel tempo, possano avvenire quando si consideri un esteso orizzonte temporale.

- Stima delle probabilità di eventi rari

Considerando che la probabilità di foratura di uno pneumatico in una giornata lavorativa di un autocarro sia pari a $1/100$, si valuti la probabilità che in un anno, composto da 260 giornate lavorative, si abbiano k forature con $k=[1,..6]$.

Le probabilità cercate sono ottenute attraverso la distribuzione di Poisson con $I=260/100=2.60$ rappresentata in figura B.7.

⁸ Per la dimostrazione vedi SCOZZAFAVA R., *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Masson, Milano, 1993, pag.100.

Fig. B.7: Andamento della distribuzione di Poisson $p(k, 2.60)$.

Distribuzione geometrica

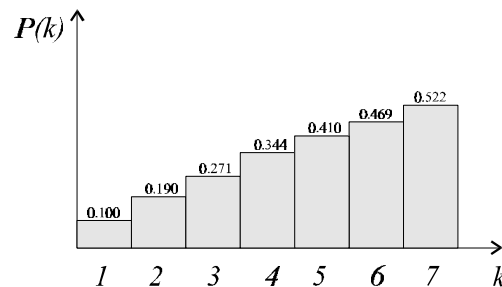
Data una serie di esperimenti ripetuti, per ognuno dei quali si ha una probabilità di successo p ; la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria che rappresenta il numero di prove fino al primo successo assume la seguente forma, detta distribuzione geometrica:

$$g(k, p) = p(1-p)^{k-1}$$

Il valore atteso della distribuzione geometrica è $m = \frac{1}{p}$ mentre quello della varianza è $s^2 = \frac{1-p}{p^2}$.

Considerando ad esempio che la probabilità che un giorno sia piovoso nel periodo considerato è pari al 10%. Si valuti la probabilità che piova prima entro k giorni con $k=[1, \dots, 7]$.

È possibile in questo caso valutare le probabilità associate all'evento pioggia dopo k giorni attraverso la distribuzione geometrica con parametro $p=0.10$ e quindi sommare tali valori per ottenere le probabilità cumulative mostrate in figura B.8.

Fig. B.8 Andamento della distribuzione geometrica cumulativa di probabilità $g(k, 0.1)$.

Vediamo nel seguito le forme assunte da alcune tra le più importanti distribuzioni continue di probabilità.

La distribuzione esponenziale è definita nella forma seguente:

$$f(x, I) = \begin{cases} I e^{-Ix}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Questa distribuzione assume la forma tipica mostrata in figura B.9.

Il valore atteso della distribuzione è $m=1/I$, mentre il valore assunto dalla varianza è $s^2=1/I^2$.

La distribuzione esponenziale è molto utilizzata per esprimere la probabilità di guasto di un'apparecchiatura nell'istante x quando il tasso istantaneo di avaria non varia nel tempo (l'apparecchiatura non è sottoposta a usura o a miglioramento).

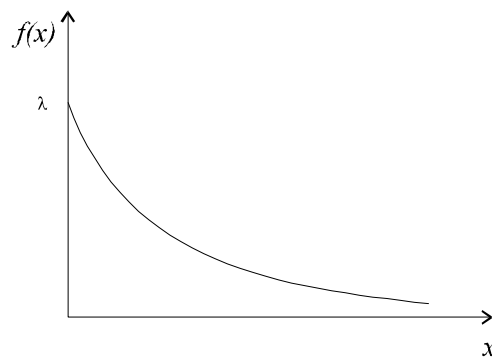


Fig. B.9 Tipico andamento della distribuzione esponenziale.

La probabilità che l'apparecchiatura non si guasti nell'intervallo $[t_1, t_2]$ può essere valutata mediante la

$$P(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} I e^{-Ix} dx = e^{-It_1} - e^{-It_2}$$

Distribuzione normale o di Gauss

La distribuzione normale è forse la più nota tra le distribuzioni di probabilità. Spesso chiamata distribuzione di Gauss essa è associata alla distribuzione degli errori di misura non sistematici.

La forma della distribuzione è descritta algebricamente dalla seguente:

$$G(x, m, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$$

dove m e s^2 sono rispettivamente il valore atteso e la varianza; topologicamente la distribuzione di Gauss è simmetrica con una forma a campana del tipo rappresentato in figura B.10.

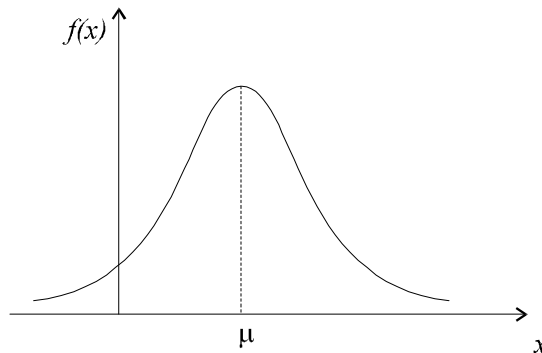


Fig. B.10 Tipica forma a campana della distribuzione normale.

La distribuzione non è integrabile in forma chiusa ed è quindi necessario ricorrere a tabelle ottenute per integrazione numerica come quella di seguito riportata. Su tali tabelle si fa riferimento alla distribuzione normale standardizzata, cioè con media $m=0$ e $s=1$ alla quale ci si può facilmente ricondurre tramite la

trasformazione $z = \frac{x - m}{s}$.

z	$f(z)$	z	$f(z)$	z	$f(z)$	z	$f(z)$
0.10	0.0398	0.60	0.2258	1.10	0.3643	1.60	0.4452
0.20	0.0793	0.70	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554
0.30	0.1179	0.80	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641
0.40	0.1554	0.90	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713
0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.00	0.4772

Tabella dei valori dell'integrale $f(z)$ della distribuzione normale standardizzata esteso all'intervallo $0, z^{30}$.

La distribuzione normale gode della proprietà di approssimare la distribuzione binomiale quando n sia molto grande e né p né $(1-p)$ siano molto piccoli; in questo caso vale la relazione⁹:

$$b(k, n, p) \cong \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} G\left(k, np, \sqrt{np(1-p)}\right).$$

Ciò fa sì che la distribuzione normale possa essere associata ad una variabile aleatoria che descriva la misura di una quantità che risulta dal concorrere di un gran numero di fattori indipendenti ciascuno con effetto piccolo rispetto alla somma di tutti gli effetti¹⁰.

La valutazione della probabilità che il numero di successi sia compreso tra due valori k_1 e k_2 è ottenibile dalla semplice differenza dei valori dell'integrale della distribuzione normale standard, ottenuta con la

⁹ La forma esplicita della distribuzione normale approssimante è

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{\left[\frac{-(k-np)^2}{2np(1-p)} \right]}$$

il cui valore atteso è $m=np$ e la cui varianza è

$$s^2 = np(1-p)$$

¹⁰ A questa situazione è spesso riconducibile il risultato di un processo complesso.

trasformazione $z = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, per i due punti $f(z_2) - f(z_1)$

- Resistenza dei materiali

Supponiamo ad esempio che la resistenza di un provino di un materiale omogeneo dipenda dal contributo di 1000 fibre ognuna delle quali offre, nel caso sia integra, una resistenza pari a 1 kg. Nell'ipotesi che con il processo di produzione utilizzato la probabilità che una singola fibra sia realizzata integra sia pari al 50%, si valuti la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria che descrive la resistenza globale del provino.

Possiamo considerare la realizzazione del provino come il risultato di una serie di eventi ripetuti e indipendenti di costituzione delle fibre, per ognuno dei quali la probabilità di successo è $p=0.50$. La distribuzione del numero di fibre integre è:

$$b(k, 10^3, 0.50) \cong \frac{1}{15.81} G(x, 500, 15.81)$$

In altri termini il numero di fibre integre ha una distribuzione normale con valore atteso pari $m=500$ e il valore della deviazione standard è $s=15.81$. Dato che la resistenza del provino è proporzionale al numero di fibre integre possiamo calcolarne il valore atteso moltiplicando il valore atteso di fibre integre per la resistenza della singola fibra; in questo modo otteniamo il valore di 500 kg. Analogamente otteniamo che la distribuzione della resistenza sarà normale come quella del numero di fibre integre con una deviazione standard pari a 15.81 kg.

Possiamo anche determinare il valore della resistenza che viene superata con un grado di certezza superiore al 95%. Per far ciò basta valutare il numero di fibre k per il quale l'integrale della coda a sinistra della distribuzione normale standard ottenuta con la trasformazione $z = \frac{k - 500}{15.81}$ sia minore di

0.05. Tale condizione si ottiene per $z < -1.65$, e quindi per $k < 473.91$. Si può concludere che il valore della resistenza superata con il 95% di probabilità è proprio 473.91 kg.

Possiamo ancora pensare di realizzare lo stesso provino con 100 fibre ognuna con resistenza di 10 kg; nell'ipotesi che le probabilità che ogni fibra sia integra sia la stessa, avremmo sempre la stessa resistenza attesa (500 kg) ma il valore superato con una probabilità del 95% scenderebbe a 417.50 kg. Un andamento contrario si ottiene aumentando il numero di fibre e riducendone proporzionalmente la resistenza. Nel caso di 10000 fibre sempre a parità di resistenza attesa avremmo che il valore superato con una probabilità del 95% sarebbe pari a 491.75 kg; la stessa quantità salirebbe ulteriormente a 497.39 kg utilizzando 100000 fibre.

Infine utilizzando direttamente la distribuzione binomiale possiamo calcolare che utilizzando solo 10 fibre tale resistenza scenderebbe addirittura a circa 300 kg.

B.6 Alcuni cenni sui processi markoviani

I processi markoviani descrivono l'evoluzione stocastica di un sistema nell'ipotesi che i cambiamenti di stato avvengano per stadi in modo tale che siano soddisfatte le due seguenti proprietà:

il sistema può assumere un insieme numerabile di stati esclusivi (a_1, a_2, \dots, a_m) , detto spazio degli stati

del sistema;

le probabilità secondo le quali il sistema può assumere i diversi stati dello spazio dipendono solo dallo stato assunto dal sistema nello stadio immediatamente precedente e non da quelli assunti negli altri stati precedenti.

Per ogni coppia di stati (a_i, a_j) è quindi nota la probabilità p_{ij} detta probabilità di transizione, con cui il sistema può assumere lo stato a_j nello stadio successivo a quello in cui ha assunto lo stato a_i .

Le probabilità di transizione possono essere ordinate in una matrice quadrata P , detta matrice di transizione, la cui riga i -esima raccoglie le probabilità di assumere tutti i possibili stati raggiungibili dallo stato a_i . Si comprende allora che la somma degli elementi di una riga deve essere necessariamente pari all'unità.

Si dimostra che il generico elemento p_{ij} della k -esima potenza P^k della matrice di transizione descrive la probabilità di passare dallo stato a_i allo stato a_j dopo k stadi.

Descriviamo con il vettore riga p^k la distribuzione di probabilità associata agli stati assunti dal sistema nello stadio k ; lo stato iniziale del sistema, anch'esso in generale non noto deterministicamente, sarà descritto dal vettore denominato p^0 nel quale sono ordinate le probabilità di trovarsi nei relativi stati.

Tra il generico vettore p^k e il vettore p^0 vale la seguente relazione:

$$p^k = p^0 P^k$$

Se la matrice di transizione P è regolare, se cioè tutti gli elementi di una sua qualsiasi potenza sono tutti maggiori di zero, allora la successione P^k approssima una matrice limite T le cui righe sono tutte uguali all'unico autovettore della matrice il cui modulo è determinato in modo tale che la somma dei suoi componenti sia unitaria. Ciò comporta che dopo un elevato numero di stadi, a prescindere dallo stato iniziale, il sistema tende a stabilizzarsi su uno stato stazionario con una distribuzione di probabilità descritta dall'autovettore unitario della matrice di transizione.

Da quanto detto appare chiaro il ruolo fondamentale svolto del concetto di transizione che determina l'evoluzione del sistema attraverso i suoi stati; la definizione degli stati è basata sulla suddivisione dell'insieme degli stati fisici possibili in sottoinsiemi opportuni, intendendo per stato fisico una particolare combinazione di valori delle variabili di stato.

Un insieme di stati tali che comunque presi due di essi sia possibile passare da uno all'altro con una o più transizioni è detto classe di equivalenza; in altri termini possiamo dire che una classe di equivalenza è costituita da stati reciprocamente comunicanti.

Alcune classi di equivalenza possono godere di particolari proprietà; in particolare ricordiamo gli insiemi *ergodici* e gli insiemi *transitori*:

un insieme ergodico è una classe di equivalenza tale che una volta che il sistema sia entrato in uno dei suoi stati non è più in grado di abbandonarlo; un insieme ergodico composto di un unico stato è detto *stato assorbente*;

un insieme transitorio è una classe di equivalenza tale che una volta che il sistema abbia abbandonato uno dei suoi stati non è più in grado di rientrarvi; un insieme transitorio composto di un unico stato è detto *stato transitorio*;

Uno stato assorbente può essere individuato verificando che la riga corrispondente sia composta da un unico termine diverso da zero, e di conseguenza pari a uno, disposto in corrispondenza della diagonale principale.

Vediamo ora un semplice esempio applicativo dei concetti esposti.

Costruiamo un modello per la valutazione del rischio di blocco di un impianto di produzione.

Per far ciò definiamo per l'impianto 3 diversi stati di efficienza:

1. impianto efficiente (qualità molto al di sopra della soglia limite);
2. impianto poco efficiente (qualità poco al di sopra della soglia limite);
3. impianto non efficiente (qualità al di sotto della soglia limite).

Lo stato 1 è assunto nel caso di impianto nuovo o dopo una adeguata manutenzione; se questa non viene effettuata si ha una evoluzione che tende a ridurre l'efficienza dell'impianto come qualitativamente mostrato nella figura B.11.

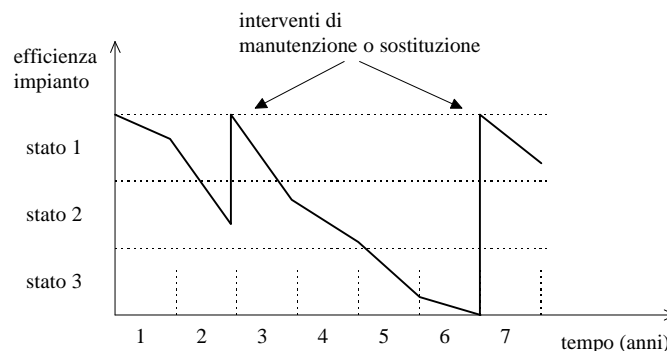


Fig. B.11 Evoluzione dell'efficienza dell'impianto con interventi di manutenzione ordinaria (impianto nello stato 2) e straordinaria (impianto nello stato 3).

Il raggiungimento dello stato 3 comporta il blocco della produzione a causa dell'intervento di manutenzione straordinaria.

Si considerino le seguenti probabilità di transizione dell'impianto da uno stato di efficienza all'altro: la probabilità di passare dallo stato 1 allo stato 2 dopo un anno di funzionamento è pari all'80%; quella che l'impianto rimanga efficiente dopo lo stesso periodo è del 10%; quella di divenire invece inquinante (stato 3) è infine pari al restante 10%.

Ancora la probabilità che l'impianto poco efficiente (stato 2) divenga dopo un anno inefficiente (stato 3) è assunta pari all'80%; quella che invece rimanga poco efficiente è pari al 20%; è assunta nulla la probabilità che l'impianto torni ad essere efficiente senza un intervento esterno. Infine si suppone che l'impianto nello stato 3, senza intervento manutentivo, rimanga inefficiente.

Il processo markoviano descritto può essere rappresentato attraverso la seguente matrice stocastica di transizione P :

	a stato 1	a stato 2	a stato 3
da stato 1	0.10	0.80	0.10
da stato 2	0.00	0.20	0.80
da stato 3	0.00	0.00	1.00

La matrice stocastica di transizione per due anni di mancata manutenzione è data dalla potenza quadratica della matrice P :

	a stato 1	a stato 2	a stato 3
--	-----------	-----------	-----------

da stato 1	0.01	0.24	0.75
da stato 2	0.00	0.04	0.96
da stato 3	0.00	0.00	1.00

Per tre anni di mancata manutenzione si ha la matrice P^3 :

	a stato 1	a stato 2	a stato 3
da stato 1	0.001	0.056	0.943
da stato 2	0.000	0.008	0.992
da stato 3	0.000	0.000	1.000

La probabilità che dopo n periodi l'impianto sia nei diversi stati, è calcolata attraverso il prodotto:

$$[x_1 \ x_2 \ x_3] \times P^n$$

dove:

P^n è la matrice di transizione di potenza n ;

$x_1=1$ se lo stato di partenza è 1, altrimenti $x_1=0$;

$x_2=1$ se lo stato di partenza è 2, altrimenti $x_2=0$;

$x_3=1$ se lo stato di partenza è 3, altrimenti $x_3=0$.

Nel nostro caso, partendo dall'impianto efficiente, abbiamo $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=0$. Se assumiamo un orizzonte temporale di 3 anni, in quanto dopo tale periodo le probabilità che l'impianto senza manutenzione si mantenga nello stato 1 o nello stato 2 sono molto basse, avremo:

dopo 1 anno: [10% 80% 10%];
 dopo 2 anni: [1% 24% 75%];
 dopo 3 anni: [0.1% 5.6% 94.3%].

Partendo invece da una situazione non nota con certezza ma che può essere definita come appartenente al 60% allo stato 1 e al 40% allo stato 2, avremo:

dopo 1 anno: [6% 56% 38%];
 dopo 2 anni: [0.6% 16% 83.4%];
 dopo 3 anni: [0.06% 3.68% 96.26%].

Possiamo anche verificare che a lungo andare l'impianto tende a raggiungere lo stato di inefficienza senza più abbandonarlo (a meno di interventi manutentivi) in quanto è facile verificare che lo stato 3 è uno stato assorbente. Inoltre è anche possibile confermare ciò verificando che l'unico autovettore di modulo unitario della matrice di transizione è il vettore $[0,0,1]$.

B.7 I sistemi di code

In questo paragrafo esamineremo i modelli per la valutazione del livello di congestione di una struttura di servizio; la congestione si evidenzia attraverso la formazione di una coda e ciò accade quando la prestazione richiesta da un utente in arrivo non può essere immediatamente soddisfatta a causa di un precedente impegno con un altro utente.

In effetti il problema della congestione si presenta in molteplici forme; quella classica è costituita dalla fornitura di un servizio come ad esempio il lavaggio di auto o la vendita di un prodotto, possiamo però studiare in modo analogo la congestione di un incrocio stradale o di un aeroporto o ancora la coda di guasti che un operatore deve riparare in un sistema di produzione. Nel contesto della produzione il problema si pone principalmente in due forme:

congestione di una successione di attività, nel caso più semplice di due attività in cui il semilavorato prodotto nella prima è utilizzato dalla seconda;

l'interferenza tra gli operatori che utilizzano risorse comuni.

Hanno rilevanza per i nostri interessi, l'entità del tempo di attesa necessario per ricevere il servizio e delle eventuali pause di inattività della struttura di servizio.

Gli scopi principali sono da un lato quello di trovare la soluzione che ottimizza la somma dei costi di servizio con i costi di attesa, dall'altro quello di ridurre la probabilità che la lunghezza della coda divenga eccessiva al punto da superare la capienza a disposizione.

Un sistema di coda è in generale costituito da un'utenza che arriva ad una struttura di servizio e attende formando una fila se tutti i serventi sono occupati, quindi non appena un servente si libera, l'utenza riceve il servizio e lascia il sistema.

Questi elementi sono caratterizzati dallo schema di arrivo degli utenti, lo schema di servizio, il numero dei serventi, la capacità della struttura di contenere gli utenti, l'ordine con cui gli utenti sono serviti.

In figura B.12 sono schematizzati alcuni esempi di sistemi di coda.

La popolazione di utenti può essere considerata in alcuni casi molto grande; ciò significa che il processo di arrivo alla struttura non è influenzato dal numero di utenti già presenti in essa.

In altri casi questa ipotesi non è realistica in quanto l'incremento degli utenti nella struttura riduce sensibilmente la frequenza degli arrivi.

Lo schema di arrivo degli utenti viene contraddistinto attraverso l'intervallo di tempo che separa gli ingressi nella struttura; esso può essere deterministico o casuale; in questo caso è descritto attraverso una distribuzione probabilistica; nella situazione più generale l'intervallo di tempo di arrivo può essere considerato variabile nel tempo.

Nel descrivere il comportamento degli utenti deve essere prevista la possibilità che essi rinuncino a porsi in coda nel caso in cui questa sia più lunga di una determinata dimensione o abbandonino la coda nella quale già si trovano nel caso in cui l'attesa superi un certo intervallo di tempo.

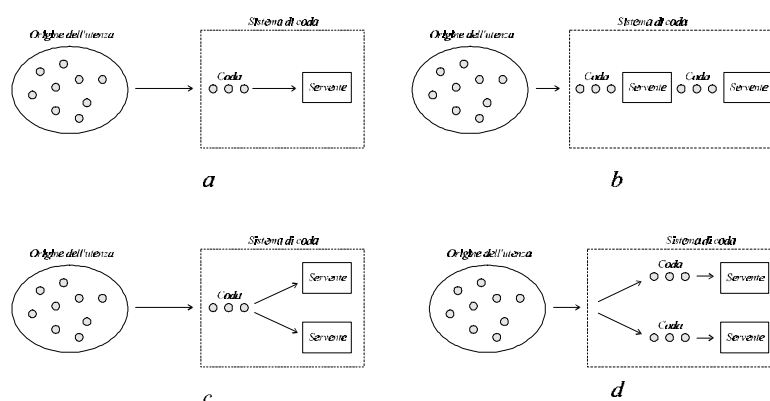


Fig B.12 Alcuni diversi sistemi di coda; il sistema 'a' è caratterizzato da un unico servente ed un'unica coda, il sistema 'b' da una sequenza di code e serventi posti in serie, il sistema 'c' da più serventi e una coda ed infine il sistema 'd' da più serventi e altrettante code.

Il tempo di servizio è descritto attraverso l'intervallo di tempo occorrente per servire un utente; esso può essere una costante o una variabile casuale di cui è nota la distribuzione; è possibile inoltre considerare il tempo di servizio come indipendente o dipendente dallo stato del sistema (numero di utenti già nella struttura) e dal tempo. Ha rilevanza nella descrizione del sistema la capacità di contenimento della coda che se finita obbliga l'utente a rinunciare al servizio qualora venga saturata.

Un'ultima considerazione deve essere fatta sulla disciplina della coda in altre parole sull'ordine con cui gli utenti vengono serviti. In genere viene adottato il criterio di servire secondo l'ordine d'arrivo (schema *fifo* 'first in-first out'), è però possibile adottare altre regole come ad esempio quella di servire in ordine inverso o in ordine casuale.

Per specificare il tipo di sistema a cui ci si riferisce è utilizzata una particolare notazione detta *notazione di Kendall* composta da cinque caratteri in cui il primo si riferisce allo schema di arrivo (ad esempio D=arrivo costante nel tempo, M=arrivi distribuiti esponenzialmente), il secondo si riferisce allo schema di servizio (ad esempio D=tempo di servizio costante nel tempo, M=tempi di servizio con distribuzione esponenziale), il terzo indica il numero di serventi, il quarto la capacità del sistema (se infinita viene anche omessa) ed infine il quinto indica lo schema di servizio (che se *fifo* viene anche omesso).

- Il sistema M-M-1

Il più semplice sistema degno di interesse è quello con un solo servente, una sola coda ed in cui gli intervalli di arrivo sono distribuiti esponenzialmente con valore atteso $\frac{1}{I}$ e i tempi di servizio sono anche essi distribuiti esponenzialmente con valore atteso $\frac{1}{m}$.

La soluzione completa del sistema¹¹, anche se possibile, è molto complessa e spesso poco utile¹². È invece possibile determinare con semplicità il comportamento del sistema a lungo andare e determinare se esiste la situazione limite stazionaria.

Definito il *fattore di utilizzazione* del sistema come il rapporto $r \equiv \frac{I}{m}$, si dimostra¹³ che se $r < 1$ la probabilità che si instauri uno stato stazionario con n utenti in coda esiste ed è

$$p_n = r^n (1 - r)$$

Quando si raggiunge lo stato stazionario sono valide le seguenti semplici relazioni¹⁴

$$\begin{aligned} W &= W_q + \frac{1}{m} \\ L &= I \cdot W \\ L_q &= I \cdot W_q \end{aligned}$$

in cui W è il valore atteso di tempo passato da un utente nel sistema e W_q è il valore atteso tempo passato da un utente in attesa in coda, L è il numero atteso di utenti nel sistema ed L_q è la lunghezza attesa della

¹¹ Intendendo con ciò l'individuazione per ogni istante di tempo t delle diverse grandezze probabilistiche che caratterizzano il sistema come ad esempio la lunghezza della coda.

¹² Essa può comunque essere trovata in COX D.R., SMITH W.L., *Queues*, Chapman and Hall, London, 1971

¹³ vd. HILLIER F.S., LIEBERMAN G.J., *Introduzione alla ricerca operativa*, Franco Angeli, Milano 1994, cap.10

¹⁴ Le ultime due sono anche dette *formule di Little* in quanto provate per la prima volta in LITTLE J.D.C., *A proof for the queuing formula L=IW*, Operational research Vol.9 1961

coda.

Esplicitando le formule abbiamo nel caso del sistema M-M-1

$$L = \frac{\mathbf{r}}{1 - \mathbf{r}} \quad ; \quad L_q = \frac{\mathbf{r}^2}{1 - \mathbf{r}}$$

$$W = \frac{1}{m - 1} \quad ; \quad W_q = \frac{\mathbf{r}}{m - 1}$$

inoltre si può trovare anche la probabilità $p_w(t)$ che un utente passi un tempo maggiore di t nel sistema e quella $p_{wq}(t)$ che passi un tempo maggiore di t in coda

$$p_w(t) = e^{-\frac{t}{W}}$$

$$p_{wq}(t) = \mathbf{r} \cdot e^{-\frac{t}{W}}$$

- Il sistema M-M-s

In questo caso abbiamo rispetto al caso precedente un numero di serventi s maggiore di uno ognuno con un tempo di servizio indipendente, anche se tutti esponenziali con la medesima distribuzione.

La particolarità di questo sistema è che il tempo occorrente perchè un utente sia servito dipende dallo stato del sistema in funzione del fatto che il numero di utenti nel sistema sia maggiore o minore del numero di serventi; si ha così

$$m = \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq n \leq s \\ s & \text{se } n > s \end{cases}$$

Le probabilità che si formi uno stato stazionario esistono se

$$\mathbf{r} \equiv \frac{1}{s} < 1$$

e sono

$$p_0 = \frac{1}{\left[\frac{s^s \mathbf{r}^{s+1}}{s!(1-\mathbf{r})} + \sum_{n=0}^s \frac{(s\mathbf{r})^n}{n!} \right]}$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{(s\mathbf{r})^n}{n!} p_0 & 0 \leq n \leq s \\ \frac{s^s \mathbf{r}^n}{s!} p_0 & n > s \end{cases}$$

Nella situazione di regime si ha inoltre

$$L_q = \frac{s^s \mathbf{r}^{s+1} p_0}{s!(1-\mathbf{r})^2}$$

$$p_w(t) = e^{-\mathbf{m}} \left\{ 1 + \frac{(s\mathbf{r})^2 p_0 [1 - e^{-\mathbf{m}(s-1-s\mathbf{r})}]}{s!(1-\mathbf{r})(s-1-s\mathbf{r})} \right\}$$

$$p_{wq}(t) = e^{-s\mathbf{m}} \left\{ \frac{(s\mathbf{r})^2 p_0}{s!(1-\mathbf{r})} \right\}$$

Pur se per ovvie ragioni non sono qui fornite, soluzioni in forma chiusa si trovano anche per molti altri sistemi come ad esempio il sistema $M-M-s-k$ che presenta cioè n serventi e una dimensione massima k ammessa per la coda¹⁵.

¹⁵ Si veda a tal proposito HILLIER F.S., LIEBERMAN G.J., *Introduzione alla ricerca operativa*, Franco Angeli, Milano 1994, cap.10