

# Sul razzo e sul paracadute

In questi appunti, nati inizialmente ad uso personale, illustreremo, senza pretesa di completezza, alcuni aspetti del moto di missili e paracaduti: l'intenzione è che essi possano essere utili, comprensibili e divertenti.

Commenti, suggerimenti, domande sono attese e sempre benvenute.

## 1 Introduzione

Prima di entrare nel vivo, vogliamo brevemente ricordare alcuni concetti che sfrutteremo nel seguito.

La legge fondamentale del moto afferma che per conoscere la posizione di qualsiasi corpo in funzione del tempo, occorre conoscere la forza complessiva che agisce sul corpo stesso: la forza imprime ad esso un'accelerazione, cioè una variazione di velocità; indicando con  $m$  la massa, misurata in kg, che tiene conto dell'inerzia del corpo, con  $a$  l'accelerazione e con  $F$  l'espressione della forza, scriviamo la legge del movimento nella forma

$$F = ma \tag{1}$$

Dalla relazione (1) emerge che una volta nota la forza e la massa, risulta determinata l'accelerazione; esiste uno strumento matematico che consente di trovare la velocità in funzione del tempo se è nota la variazione, nel tempo, della velocità stessa: tecnicamente si chiama **integrazione**; in seguito, con un'ulteriore integrazione, possiamo determinare la posizione in funzione del tempo a partire dalla conoscenza del tasso di variazione temporale della posizione stessa, che è appunto la velocità.

Un paio di precisazioni prima di andare avanti.

La (1) vale solo nei sistemi di riferimento cosiddetti **inerziali**, definiti operativamente dalle seguenti tre condizioni:

1. rispetto ad un riferimento inerziale un corpo libero, cioè non soggetto a forze, permane nello stato di quiete o di moto relativo a velocità rettilinea ed uniforme
2. in un riferimento inerziale la dinamica è determinata dalla conoscenza dell'accelerazione impressa ad un corpo
3. in un riferimento inerziale ad ogni forza corrisponde una reazione uguale e contraria

Qualora il riferimento spaziotemporale non sia inerziale bisogna aggiungere nella legge (1) del moto di Newton dei termini correttivi che tengano conto delle forze apparenti.

Senza entrare nei dettagli, aggiungiamo che in generale la dinamica, a seconda delle simmetrie presenti, è legata a leggi di conservazione, come il teorema di conservazione dell'energia, il teorema di conservazione del momento lineare ed il teorema di conservazione del momento angolare.

## 2 Moto del paracadutista

... veniamo da lontano, per vie arcane e belle, volando nella notte ci guidano le stelle...

### 2.1 Paracadute tondo

Assumiamo che il sistema di riferimento solidale con la Terra sia sufficientemente inerziale, in modo che la legge della dinamica si scriva, à la Newton, nella forma più semplice possibile:  $F = ma$ . La forza complessiva che determina il movimento è la somma di un termine dovuto al peso  $F_p = mg$  e di un altro dovuto all'attrito, responsabile dell'azione frenante; quest'ultimo, per definizione, si oppone sempre al moto. Indicando con  $\mathbf{j}$  il verso positivo nella direzione lungo cui si svolge l'atto di moto, scriveremo il contributo relativo all'attrito come  $F_a = -f \mathbf{j}$  dove la forza è espressa dalla funzione  $f \geq 0$ : assumeremo una legge  $f$  di smorzamento dell'atto di moto dipendente solo dalla velocità secondo una relazione semplice di potenza

$$F_a = -k \dot{A}(v) \mathbf{j}$$

con  $\dot{A}(v) \geq 0$ ,  $k > 0$ . In questa maniera la dinamica è determinata dalla relazione

$$ma = mg - k \dot{A}(v)$$

con l'asse verticale orientato verso il basso, cioè nel verso concorde alla spinta gravitazionale.

Il motivo per cui si assume che lo smorzamento del moto dipenda dalla velocità è duplice: sia di carattere teorico, in quanto si può facilmente dimostrare che la dissipazione è legata a forze dipendenti dalla derivata prima dell'atto di moto, sia sperimentale, perchè così risulta dall'esperienza.

Per quanto riguarda l'espressione della forza peso, ricordiamo che  $g$  rappresenta l'accelerazione che la massa della Terra imprime a tutti i corpi, indifferentemente dalla massa di questi ultimi e dal tipo di materia di cui sono fatti; essa in generale varia in dipendenza della distribuzione locale, cioè della densità, della massa terrestre e della distanza da essa: rimandando per ulteriori dettagli alla sezione sul razzo, qui ci basterà assumere che in tutti i luoghi  $g$  sia costante in direzione, in verso e in intensità e che non vari con la quota ossia che la variazione dell'accelerazione di gravità in conseguenza del mutare della distanza dalla Terra, sia trascurabilmente piccola.

Un valido modello per schematizzare l'azione del paracadute consiste nel considerare un frenamento proporzionale al quadrato della velocità  $\dot{A}(v) = v^2$ ; in questo modo la relazione precedente si riscrive

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad (2)$$

La costante positiva  $k$  ha le dimensioni di  $[M][L]^{-1}$ : essa si deve interpretare come una massa caratteristica per unità di lunghezza, vale a dire che

esprime quanti chilogrammi vengono frenati in una misura tipica per ogni metro percorso. Il suo inverso, dunque, è una lunghezza caratteristica di frenamento per unità di massa necessaria, come vedremo in dettaglio nel seguito, per una diminuzione di velocità di circa il 76%. Pertanto  $1/k$  esprime quanti metri occorrono per frenare nella misura indicata 1 kg in caduta. La relazione (2) pretende, per consistenza matematica, che sia soddisfatta la condizione

$$g_i \frac{dv}{dt} > 0$$

cioè essa ha senso se e solo se il frenamento dovuto al paracadute non eccede la spinta gravitazionale.

Risolveremo il moto (2) dapprima per forza bruta sfruttando la funzione  $\frac{dv(t)}{dt} = u(t)$  così che esprimeremo la variazione infinitesima della velocità come

$$dv = u dt \quad (3)$$

e la (2) si riscrive

$$v = \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} u \quad (4)$$

Ora differenziando la (4) si ricava

$$dv = \frac{1}{2} \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} du$$

e per confronto con la (3) otteniamo integrando entrambi i membri

$$\frac{1}{2} \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} \int \frac{du}{u} = t$$

L'integrale a primo membro si risolve con la sostituzione  $g_i u = w^2$  che porge

$$\int \frac{du}{u} = 2 \int \frac{dw}{g_i w^2} = \frac{1}{g_i} \ln \left| \frac{g_i + w}{g_i - w} \right|$$

A questo punto passando dai logaritmi ai numeri si ottiene

$$\exp \left( 2 \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} t \right) = \frac{1 + \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} u}{1 - \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} u}$$

Ponendo ora  $e^{2 \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} t} = x$ ,  $\frac{r}{k} \frac{m}{g_i} u = y$ , si ricava  $x = \frac{1+y}{1-y}$ ; a questo punto la (4) porge l'espressione della velocità in funzione del tempo

$$v(t) = \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} \frac{e^{2 \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} t} - 1}{e^{2 \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} t} + 1} = \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} \tanh \left( \frac{r}{k} \frac{m}{g_i} t \right) \quad (5)$$

Se, anzichè partire da fermo, come si è supposto tacitamente per l'integrazione fatta fin qui delle leggi del moto, le condizioni iniziali sono tali che  $v(0) = v_0$  allora si ottiene  $N \gg = \frac{1+x}{1-i-x}$  da cui  $x = \frac{N \gg - 1}{N \gg + 1}$  con il che l'espressione (5) si pone come

$$v(t) = \frac{r \frac{mg}{k} N e^{2 \frac{kg}{m} t} - 1}{N e^{2 \frac{kg}{m} t} + 1}$$

$$N = \frac{1 + v_0 \frac{k}{mg}}{1 - v_0 \frac{k}{mg}}$$

ossia anche

$$v(t) = v_L \frac{(v_L + v_0) e^{t/\tau} - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}}{(v_L + v_0) e^{t/\tau} + (v_L - v_0) e^{-t/\tau}} \quad (6)$$

avendo indicato con

$$v_L = \frac{r \frac{mg}{k}}{1} \quad (7)$$

la velocità limite e con

$$\tau = \frac{r \frac{m}{kg}}{1} = \frac{v_L}{g} \quad (8)$$

il tempo caratteristico del fenomeno di frenamento. Diamo un breve resoconto numerico con riferimento ad un caso concreto. Abbiamo già detto che in generale l'accelerazione subita da qualsiasi corpo per effetto della massa della Terra ha un valore, di solito indicato con  $g$ , che può variare solo in funzione della distanza relativa tra il corpo e la Terra e in funzione della massa di quest'ultima. In particolare, nel volume di circa  $1 \text{ km}^3$  nell'intorno della Terra il campo di accelerazione gravitazionale si può ritenere con ottima approssimazione costante: esso esercita dunque su tutti i corpi, indifferentemente dalla loro massa, una spinta con un valore dell'ordine di  $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ ; questo significa che in assenza di altre forze, un corpo in caduta libera precipita con accelerazione costante, pari al valore indicato, e la sua velocità aumenta con continuità di  $9,81 \text{ m/s} \approx 35 \text{ km/h}$  per ogni secondo di caduta, mentre lo spazio percorso varia quadraticamente con il passare del tempo. Una legge quadratica vuol dire che un raddoppio del tempo trascorso in caduta libera quadruplica lo spazio percorso, e così via, un triplicare dell'intervallo di tempo rende ben nove volte la distanza percorsa.

Il paracadute a calotta emisferica IRVING 80B che ha sostituito il CMP 55, fornisce una velocità di caduta costante di circa  $6 \text{ m/s}$ ; pertanto senza deriva, cioè in assenza di vento, potremo tranquillamente assumere che  $v_L \approx 6,00 \text{ m/s}$  per una massa complessiva non superiore a  $130 \text{ kg}$ . Ciò fornisce un tempo di

frenamento poco superiore al mezzo secondo:  $\tau \approx 0,61$  s e quindi una costante  $k$  intorno ai  $35 \approx 36 \text{ kg/m}$ , valore consistente con l'espressione tipica della costante di accoppiamento delle forze di attrito:  $k = \frac{1}{2}cA$  (vedi sezione successiva sul razzo) con una velatura di  $80 \text{ m}^2$  (IR 80B).

Quello che è interessante notare, come si vedrà soprattutto dallo studio successivo, è che la velocità limite è proporzionale alla radice quadrata del peso (dove, *repetita iuvant*, il peso è la massa moltiplicata per l'accelerazione di gravità), se si usa il paracadute, altrimenti, il limite asintotico della velocità è proporzionale al peso: ciò vuol dire che a parità di peso la velocità limite è maggiore senza paracadute!

Per quanto riguarda l'azione dell'attrito, occorre sottolineare un fenomeno del tutto controintuitivo, ma che avviene in generale; pensiamo ad esempio di lanciare da Terra una palla verso l'alto e supponiamo in un primo tempo che l'attrito dell'aria sia completamente trascurabile: la palla salirà per un certo tempo fino ad una altezza massima, che dipenderà dalla velocità iniziale, qui si fermerà per un istante e poi cadrà di nuovo giù, fino ai nostri piedi, in caduta libera. Se aggiungiamo anche la frizione atmosferica, ci aspettiamo ora che l'apogeo sia minore del caso precedente: ci chiediamo dunque se il tempo necessario, in rapporto alla mutata situazione, è più corto, uguale o più lungo; la risposta, per nulla immediata, dipende da quanto l'azione dell'attrito influenza in misura diversa lo spazio di percorrenza e il tempo necessario a percorrerlo, rispettivamente in misura maggiore, uguale o minore.

Bene, si può dimostrare, se siete interessati lo aggiungerò in una successiva versione, che per molte situazioni realistiche il tempo di percorrenza è minore se l'attrito non si può trascurare rispetto al caso in cui si assume frizione nulla. Fenomeno analogo per un moto verso il basso. Il paracadutista, nell'offerta, tiene debitamente conto di questo fatto.

Accenniamo ora le linee principali di come si ottiene lo spazio percorso con una banale integrazione.

Comincia col riunificare le seguenti costanti  $a \sim (v_L + v_0)$ ,  $b \sim (v_L - v_0)$ ,  $A \sim \frac{a}{b}$  e riscalda la variabile temporale in unità naturali

$$t = \tau x$$

Poi sintetizza gli esponenziali  $e^{2x(t)}$  in  $\gg(t)$  così che la velocità appare in forma razionale

$$v = v_L \frac{Ae^{2x} - 1}{Ae^{2x} + 1} = v_L \frac{A\gg - 1}{A\gg + 1}$$

da qui sfruttando l'identità algebrica

$$\frac{1}{\gg(A\gg + 1)} = \frac{\gg - A}{A\gg + 1} + \frac{1}{\gg}$$

si ottiene direttamente per quadratura

$$\begin{aligned}
 s &= v_L \int \ln \frac{Ae^{2t/\zeta} + 1}{e^{t/\zeta}} dt + c^0 = \\
 &= v_L \int \ln \left( Ae^{t/\zeta} + e^{-t/\zeta} \right) dt + c^0 = \\
 &= v_L \int \ln \left( (v_L + v_0) e^{t/\zeta} + (v_L - v_0) e^{-t/\zeta} \right) dt + c
 \end{aligned}$$

Se la quota di lancio del paracadutista è  $s(0) = h_0$  e la velocità iniziale lungo la direzione di caduta  $v(0) = v_0$  allora la costante d'integrazione vale  $c = h_0 - v_L \int \ln 2v_L$ ; in definitiva la legge del moto è

$$s = h_0 + v_L \int \ln \left( \frac{v_L + v_0}{2v_L} e^{t/\zeta} + \frac{v_L - v_0}{2v_L} e^{-t/\zeta} \right) dt \quad (9)$$

Dalla formula precedente notate come la legge oraria sia fatta, sotto l'operatore di logaritmo, del contributo dato dal termine  $\frac{v_L - v_0}{2v_L} \exp \left( -\frac{t}{\zeta} \right)$  che inizialmente è quello dominante ma che va rapidamente a zero, e del termine  $\frac{v_L + v_0}{2v_L} \exp \left( \frac{t}{\zeta} \right)$  che molto velocemente, dopo tempi pari a soli  $\zeta$ ,  $2\zeta$ ,  $3\zeta$  diventa l'unica quantità significativa: questo vuol dire che lo spazio percorso in funzione del tempo va quasi subito in maniera lineare

$$s \approx h_0 + \ln \frac{v_L + v_0}{2v_L} v_L t \quad (10)$$

In altri termini il paracadute è efficace molto rapidamente rendendo quasi immediatamente dopo lo shock di apertura il moto rettilineo uniforme.

Facciamo delle ulteriori precisazioni su quanto abbiamo appena detto, precisazioni che sono un pò sottili e che quindi si potranno tranquillamente saltare in una prima lettura.

All'uscita dall'aereo, il paracadutista ha, rispetto alla Terra, la velocità di traslazione dell'aereo stesso: ad essa, che chiameremo velocità di deriva, si sovrappone il moto verso il basso.

Visto che la velocità iniziale di deriva da vettore militare è dell'ordine di 250 km/h cioè molto maggiore della velocità limite, potremo individuare la traiettoria effettiva percorsa dal paracadutista rispetto alla Terra stimando il moto di traslazione orizzontale, che corrisponde più o meno al verso di volo dell'aeromobile, con la seguente, semplice legge

$$s_x \approx h_0 + v_L t \quad (11)$$

dove  $s_x$  indica la componente orizzontale dello spazio percorso alla quota  $h_0$  e la costante vale  $v_L = \frac{1}{2} \frac{v_L + v_0}{v_L - v_0} v_L$  con  $v_0 < v_L$ .

Infatti definito  $x \ll v_L = v_0$  risulta subito che

$$\begin{aligned} \textcircled{*} &= \ln \frac{1+x}{2x} = \ln(1+x) - \ln x - \ln 2 \\ &\approx x - \frac{1}{2}x^2 - (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \ln 2 + O(x^3) \\ &\approx x - x + 1 - \ln 2 + O(x^2) = 1 - \ln 2 \approx 0,3 \end{aligned} \quad (12)$$

Per il calcolo precedente si è sfruttato semplicemente il fatto che la componente orizzontale della velocità del paracadutista ha inizialmente un valore  $v_0 \approx 250 \text{ km/h} \approx 900 \text{ m/s}$  che è molto maggiore della velocità limite, la quale deve essere invece dell'ordine di qualche metro al secondo ( $v_L \approx 4 \text{ m/s}$  per il T10).

Per quanto riguarda invece la componente verticale del moto, rifacendo tutto il ragionamento e tenendo conto che tipicamente la velocità iniziale in caduta è molto minore della velocità limite cioè che  $v_0 = v_L \ll 1$  si ha

$$\begin{aligned} \textcircled{*} &= \ln \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{v_0}{v_L} \right) = \ln(1+x) - \ln 2 \\ &\approx x - \frac{1}{2}x^2 - \ln 2 + O(x^3) \\ &\approx x - \ln 2 + O(x^2) \end{aligned}$$

avendo scritto questa volta  $x \ll v_0 = v_L$ . Quindi se  $x$  è una piccola correzione dell'ordine di non più di qualche centesimo, brutalmente risulta  $\textcircled{*} \approx -\ln 2 \approx -0,69 \approx -0,7$ . In queste ipotesi si può dire che la componente verticale del moto a regime, cioè dopo l'apertura del paracadute che avviene all'incirca dopo 5 s di caduta pressochè libera dall'uscita dall'aereo e dopo che in un intervallo di tempo dell'ordine di grandezza di  $\tau$  si è completato il frenamento, varia nel tempo con la seguente legge che esprime la quota ossia l'altezza dalla superficie terrestre

$$s_y \approx h_0 - 0,7 \tau v_L t$$

e quindi la distanza percorsa verso la Terra dall'uscita dall'aereo vale  $d_y \approx 0,7 \tau v_L t$ .

Gli sviluppi che abbiamo testè fatto sono corretti, tuttavia per afferrare il giusto significato delle conclusioni cui siamo arrivati, si tenga presente che in entrambi i casi  $v_0$  è la velocità al momento in cui si apre il paracadute: se l'apertura è molto veloce rispetto ai tempi scanditi dalla dinamica in caduta libera, o comunque riguardo alla dinamica con frenamento debole, cioè se l'apertura si può considerare quasi istantanea, allora  $v_0$  è la velocità con cui il paracadutista esce dall'aereo, altrimenti  $v_0 \approx 50 \text{ m/s} \approx 170 \text{ km/h}$  per la componente verticale e  $v_0 \approx 250 \text{ km/h} \approx 900 \text{ m/s}$  per la componente orizzontale; dunque se l'apertura del paracadute è lenta, ossia dopo l'uscita dall'aereo si deve tener conto di un intervallo di tempo di caduta quasi libera, sia per la deriva orizzontale che per

la discesa verticale siamo nel caso in cui  $v_L = v_0 \ll 1$  : entrambi sono descritti da una legge del tipo

$$s = 0,3 \zeta v_L t$$

Ricordiamo con ammirazione che i parà sovietici e dell'ex Patto di Varsavia vengono lanciati a circa 380 km=h ma da alta quota, così che fanno dai 17 s ai 20 s di caduta quasi libera prima dell'apertura del paracadute principale cioè prima di raggiungere il moto rettilineo uniforme espresso dalla formula (6).

Se la velocità iniziale di caduta è nulla, il moto segue la legge oraria della forma più semplice

$$s = h_0 + v_L \zeta \ln \cosh(t/\zeta) \quad (13)$$

ancora una volta, per tempi grandi rispetto alla scala naturale data dal parametro  $\zeta$ , abbiamo in modo analogo di nuovo un moto rettilineo a velocità uniforme:  $s = h_0 + (\zeta \ln 2) v_L t$

Derivando la (6) si ottiene l'accelerazione complessiva sperimentata per effetto del paracadute

$$\begin{aligned} a(t) &= 4 \frac{v_L}{\zeta} \frac{v_L^2 \zeta + v_0^2 \zeta}{(v_L + v_0) e^{t/\zeta} + (v_L - v_0) e^{-t/\zeta}} = \\ &= 4g \frac{(v_L + v_0)(v_L - v_0)}{(v_L + v_0) e^{t/\zeta} + (v_L - v_0) e^{-t/\zeta}} \end{aligned} \quad (14)$$

Nelle prossime figure vedete i grafici della legge oraria  $s(t)$  che esprime cioè la distanza percorsa al trascorrere del tempo, della velocità  $v(t)$  e della accelerazione  $a(t)$  in funzione del parametro adimensionale  $t/\zeta$  per diversi valori della velocità iniziale; come è ragionevole aspettarsi, l'efficienza del paracadute aumenta in modo molto considerevole all'aumentare della velocità iniziale, perchè in generale il frenamento che esso fornisce dipende, come abbiamo detto, dalla velocità; questo fenomeno dunque è molto vantaggioso perchè nel caso del paracadutista, a differenza del razzo, la velocità iniziale tipicamente è molto maggiore della velocità limite. Notate inoltre come l'accelerazione si annulla rapidissimamente!

### 2.1.1 Teoremi di conservazione

Fin qui abbiamo risolto il moto affrontando direttamente il problema matematico dell'equazione differenziale (2); si può far vedere un procedimento più elegante e più profondo dal punto di vista fisico per riottenere i medesimi risultati.

Riscriviamo la legge della dinamica  $ma = -mg - kv^2$ , che qui useremo anche per discutere il moto verso l'alto di un proiettile balistico, come

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \left( 1 + \frac{k}{mg} \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (15)$$



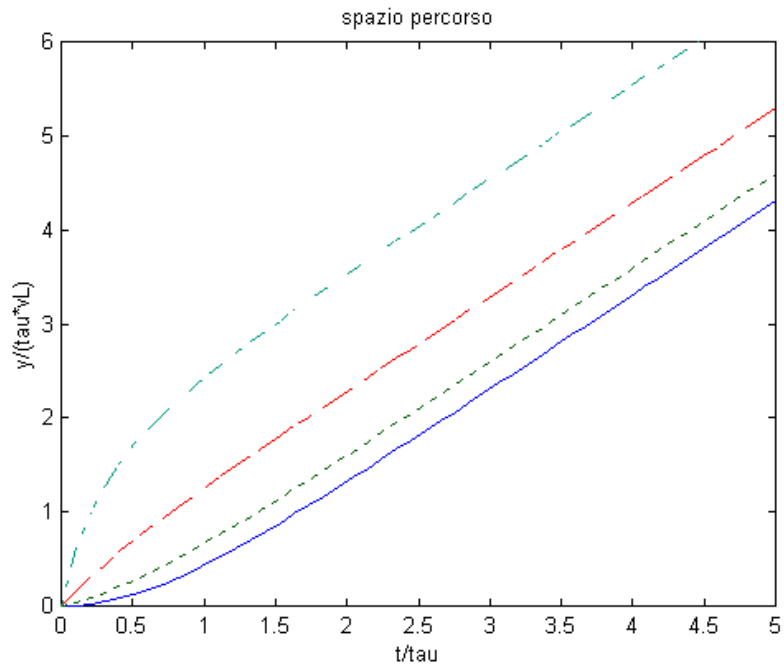


Figure 1:

Ora poniamo

$$1 + \frac{k}{mg} \mu \frac{ds}{dt} \sqrt{1 + \frac{1}{v_L^2} \left( \frac{ds(t)}{dt} \right)^2} = 1 + \hat{A}^2(t) \quad (16)$$

così la (15) si riscrive

$$\frac{\frac{v_L}{g} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{v_L} \mu \frac{ds}{dt} \sqrt{1 + \frac{1}{v_L^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2} \right)}{1 + \frac{1}{v_L^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2} = i \quad (17)$$

che porta ad una facile risoluzione per quadratura con l'integrale primo

$$\frac{d}{dt} \left( t + \frac{v_L}{g} \arctan \hat{A}(t) \right) = 0 \quad (18)$$

ossia

$$\frac{v_L}{g} \arctan \frac{1}{v_L} \left( \frac{ds(t)}{dt} \right)^{3/4} = i t + c_1$$

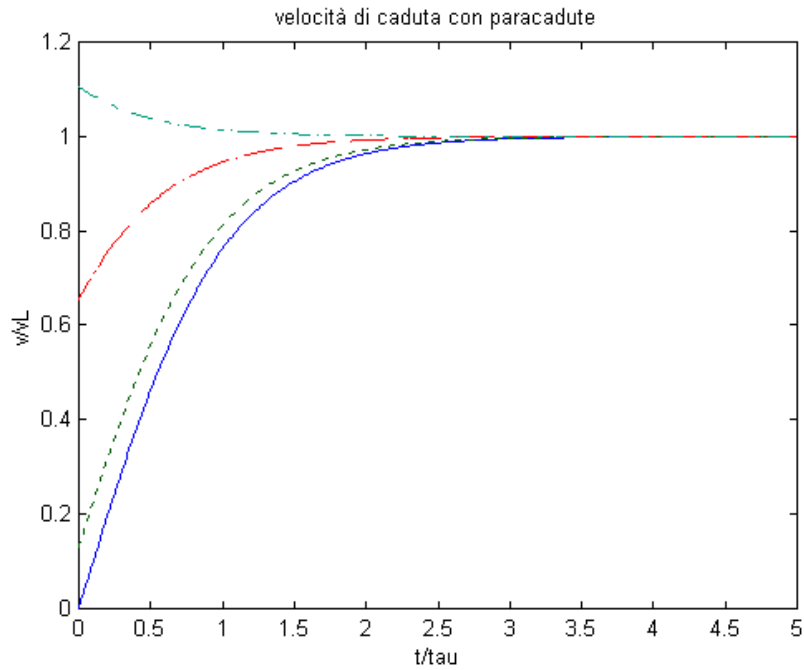


Figure 2:

con costante di integrazione  $c_1 = \frac{v_L}{g} \arctan \frac{v_0}{v_L} = \zeta \arctan \frac{v_0}{v_L}$ .

Come accennavamo, non abbiamo fatto altro che ricavare di nuovo i risultati ottenuti già per forza bruta, tuttavia l'elegante procedimento (17) di riscrivere le leggi del moto facendo venir fuori nella (18) una legge di conservazione, cioè una simmetria algebrica astratta, è notevole perchè esso viene condotto su un sistema dinamico non conservativo, in cui cioè un integrale primo, che ovviamente non è l'energia, ma che come vedi è ancora possibile costruire, dipende esplicitamente dal tempo.

A questo punto si ottiene immediatamente la legge di velocità

$$v(t) = v_L \tan \left[ \arctan \frac{v_0}{v_L} + \frac{g}{v_L} t \right] = v_L \frac{\frac{v_0}{v_L} + \tan \frac{g}{v_L} t}{1 + \frac{v_0}{v_L} \tan \frac{g}{v_L} t} \quad (19)$$

Moltiplichiamo ora numeratore e denominatore per  $\zeta \cos(t=\zeta)$ : il numeratore si risolve nella derivata del denominatore rispetto al tempo: questo vuol dire che con uno scaltro trucchetto abbiamo ottenuto la nullità della variazione temporale del logaritmo del denominatore; come vedi ancora un elegante teo-

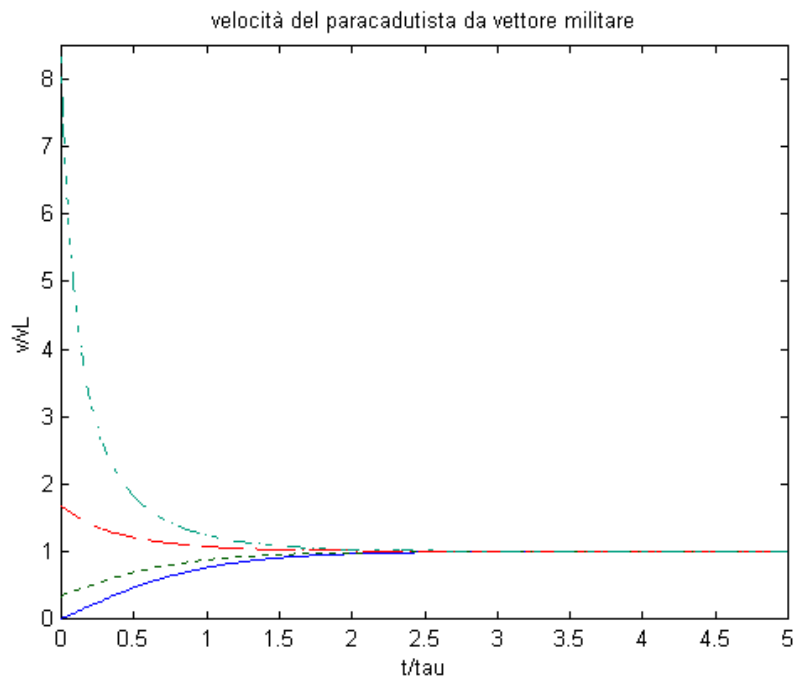


Figure 3:

rema di conservazione! Quindi un'ulteriore, banale integrazione, fornisce la legge oraria

$$s(t) = v_L \zeta \ln \left[ \frac{v_0}{v_L} \sin \frac{\mu t}{\zeta} + \cos \frac{\mu t}{\zeta} \right] + s_0 \quad (20)$$

dove, lo ricordiamo, si sono sfruttate le condizioni iniziali

$$\begin{cases} s(0) = s_0 \\ \dot{s}(0) = v_0 \end{cases} \quad (21)$$

per determinare la costante di integrazione  $c_1 = \frac{v_L}{g} \arctan \frac{v_0}{v_L} = \zeta \arctan \frac{v_0}{v_L}$

L'altezza massima viene raggiunta al tempo

$$t^* = \frac{v_L}{g} \tan \frac{\mu}{v_L} = \zeta \tan \frac{\mu}{v_L} \quad (22)$$

che annulla la velocità:  $s_{\max} = s(t^*)$ . In alternativa si poteva trovare agilmente una relazione tra  $\frac{ds}{dt}$  ed  $s$  cioè una legge del tipo  $v = v(s)$  che per  $v = 0$  fornisce

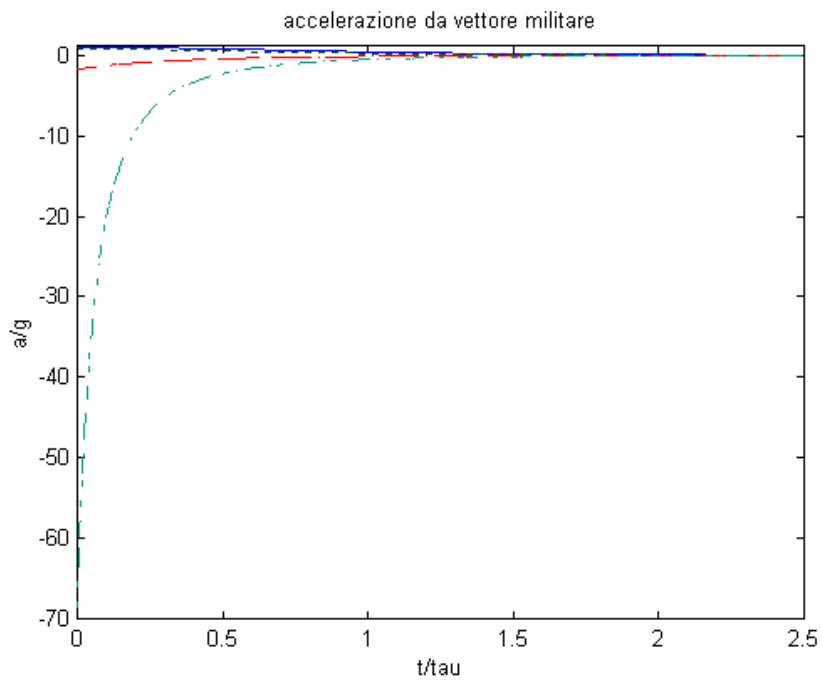


Figure 4:

in maniera diretta la quota massima del proiettile. A tale scopo si sfrutterà il procedimento che segue, le cui linee concettuali sono del tutto generali.

Si riscrive infatti  $\frac{d^2s}{dt^2} = -g \left( 1 + \frac{1}{v_L^2} \mu \frac{ds}{dt} \right)$  come

$$\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{g \left( 1 + \frac{1}{v_L^2} \mu \frac{ds}{dt} \right)} = -1$$

e quindi anche

$$\frac{\frac{2}{v_L} \mu \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2}}{g \left( 1 + \frac{1}{v_L^2} \mu \frac{ds}{dt} \right)} = - \frac{2}{v_L} \mu \frac{ds}{dt}$$

Ora

$$\frac{2}{v_L} \mu \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{v_L} \mu \frac{ds}{dt} \right) \cdot v_L \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{v_L} \mu \frac{ds}{dt} \right) \quad (23)$$

e quindi con la precedente relazione si evidenzia quest'altro integrale primo

$$\frac{\frac{d}{dt} \left( 1 + \frac{1}{v_L^2} \mu \frac{ds}{dt} \right)}{1 + \frac{1}{v_L^2} \mu \frac{ds}{dt}} = i \frac{2g}{v_L^2} \mu \frac{ds}{dt}$$

ossia

$$\frac{d}{dt} \left( 2 \frac{g}{v_L^2} s(t) + \ln \left( 1 + \frac{1}{v_L^2} \mu \frac{ds}{dt} \right) \right) = 0 \quad (24)$$

che banalmente fornisce

$$\begin{aligned} \ln \left( 1 + \frac{1}{v_L^2} \mu \frac{ds}{dt} \right) &= i \frac{2g}{v_L^2} s(t) + c_1 \\ c_1 &= 2 \frac{g s_0}{v_L^2} + \ln \left( 1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$v^2 [s(t)] = i v_L^2 + i v_L^2 + v_0^2 \exp \left( 2 \frac{g}{v_L^2} [s_0 + s(t)] \right)^{1/2}$$

e quindi l'orbita

$$v(s) = v_L \left( 1 + \frac{v_0}{v_L} \exp \left( 2 \frac{g}{v_L^2} (s_0 + s) \right) \right)^{1/2} \quad (25)$$

a questo punto imponendo  $\frac{ds}{dt} = 0$  si trova  $v(s_{\max}) = v[s(t^*)] = 0$  ossia

$$s_{\max} = s_0 + \frac{v_L^2}{2g} \ln \left( 1 + \frac{v_0}{v_L} \right)$$

Tutto questo si riferisce ad una proiettile lanciato verso l'alto; per un moto nel verso dell'accelerazione di gravità invece, si deve semplicemente cambiare l'equazione ( ) in

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \quad (26)$$

ossia basta cambiare  $k$  con  $ik$ ,  $i \rightarrow +\frac{p}{i}$ .

I risultati con  $v_0 = 0$  sono, tempo folgora,

$$\frac{ds}{dt} = \quad (27)$$

che si integra subito

$$s = \quad (28)$$

Inoltre qui abbiamo (cambia)

$$e^{i k^2 g s} = \frac{1}{2} [\exp(kgt) + \exp(i kgt)] \quad (29)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + e^{2k^2 g s}} \quad (30)$$

### 2.1.2 Separazione delle variabili

Prima di passare oltre, vogliamo far vedere che la (2) suggerisce una risoluzione per separazione delle variabili: basta infatti scrivere

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 = mg \left( 1 - \frac{v^2(t)}{v_L^2} \right)$$

da cui segue per quadratura

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{1}{g} \int_{v_0}^v \frac{dw}{1 - \frac{w^2}{v_L^2}} = \\ &= \frac{1}{g} \left[ \tanh^{-1} \frac{v}{v_L} - \tanh^{-1} \frac{v_0}{v_L} \right] \end{aligned}$$

a questo punto risolvendo per  $v$  abbiamo di nuovo la (6) :

$$v(t) = v_L \tanh \left[ \frac{t - t_0}{\zeta} + \tanh^{-1} \frac{v_0}{v_L} \right]$$

Senza perdita di generalità, possiamo sempre imporre  $t_0 = 0$  perchè l'equazione di Newton è invariante per traslazione temporale; inoltre nel caso particolare di velocità iniziale nulla, la formula

$$v(t) = v_L \tanh \frac{t}{\zeta}$$

mostra che dopo un tempo pari a  $\zeta$  dall'inizio del frenamento la velocità si è già ridotta al 76,2% della velocità limite  $v_L$  ; dopo  $2\zeta$  è al 96,4% , dopo  $3\zeta$  è al 99,5% .

Nella pratica siamo interessati a conoscere anche la velocità raggiunta dopo la caduta per una data distanza; essa si può ottenere eliminando il tempo da

$s(t)$  e  $v(t)$ . In maniera diretta e più elegante la velocità in funzione della quota si ottiene riscrivendo come segue l'equazione differenziale del moto in modo che la variabile indipendente sia la distanza anziché il tempo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

così possiamo subito scrivere

$$\frac{d}{ds} v^2(s) = 2g \left( 1 - \frac{v^2(s)}{v_L^2} \right)$$

Chiamiamo ora  $u = 1 - \frac{v^2(s)}{v_L^2}$  così che  $\frac{du}{ds} = -\frac{1}{v_L^2} \frac{d}{ds} v^2(s) = -\frac{2g}{v_L^2} u$  ossia  $u = u_0 e^{-2gs/v_L^2}$ ; siccome  $u_0 = u|_{s=0} = 1 - \frac{v_0^2}{v_L^2}$  troviamo

$$\begin{aligned} u &= 1 - \frac{v^2(s)}{v_L^2} = \\ &= \left( 1 - \frac{v_0^2}{v_L^2} \right) \exp \left( -\frac{2gs}{v_L^2} \right) \end{aligned}$$

e quindi

$$v^2(s) = v_L^2 \left( 1 - e^{-2gs/v_L^2} \right) + v_0^2 e^{-2gs/v_L^2} \quad (31)$$

La formula precedente esprime il fatto che la velocità iniziale  $v_0$  decade esponenzialmente con lunghezza caratteristica

$$\frac{v_L^2}{2g} = \frac{1}{2} v_L \zeta \quad (32)$$

mentre la velocità limite diventa esponenzialmente, con identica lunghezza caratteristica, il contributo dominante alla velocità. Per l'IRVING 80B il calcoletto mostra che  $\zeta = 1,83 \text{ m}$ : sottolineiamo ancora una volta che il paracadute agisce in tempi molto brevi e su distanze molto corte.

I tempi indicati sopra e le relative entità di frenamento corrispondono dunque alla percorrenza di xxx m, sss m, zzz m.

Lasciamo per esercizio il metodo di risoluzione per variazione delle costanti arbitrarie.

## 2.2 Caduta in un mezzo debolmente resistente

La legge del moto, proiettata sull'asse verticale orientato verso il basso, è espressa dalla relazione

$$ma = mg - kv$$

dove  $k$  è una costante positiva con dimensioni  $[M][T]^{-1}$ ; la legge oraria si ricava integrando dunque

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dy}{dt} = g \quad (33)$$

Gli zeri  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -\frac{k}{m}$  del polinomio caratteristico

$$s^2 + \frac{k}{m}s = 0 \quad (34)$$

forniscono la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (33)

$$y_{ho}(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{k}{m}t}$$

ove  $c_1, c_2$  sono costanti d'integrazione i cui valori vanno determinati dalle condizioni iniziali.

La soluzione generale della (33) sarà la sovrapposizione della funzione  $y_{ho}(t)$  con una soluzione particolare della medesima (33), la cui forma, a causa dei valori degli zeri dell'equazione (34), sarà

$$y_p = ct$$

In alternativa si può ottenere la soluzione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, anch'esso lasciato all'intraprendente lettore.

Ponendo come condizioni iniziali

$$\begin{aligned} y(0) &= h \\ y'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

si trovano i valori  $c = \frac{mg}{k}$ ;  $c_1 = h - \frac{m^2g}{k^2}$ ;  $c_2 = \frac{m^2g}{k^2}$  dunque la cercata soluzione sarà

$$y(t) = h - \frac{m^2g}{k^2} + \frac{m^2g}{k^2} \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + \frac{mg}{k}t \quad (36)$$

In seguito integreremo, in alternativa, direttamente la relazione differenziale al prim'ordine per la velocità  $v(t) = \frac{dy}{dt}$  che si ottiene dalla (33).

Più in generale le leggi di un mobile con velocità iniziale  $v_0$  arbitraria cioè orientata di un angolo  $\theta$  qualsiasi rispetto al piano contenente la linea orizzontale di terra e la verticale locale, si ricavano integrando

$$\begin{aligned} m a_x &= -k v_x \\ m a_y &= mg - k v_y \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \theta \\ v_y &= v_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (38)$$



con le costanti  $m > 0; k > 0; g > 0; v_0 > 0$  e con le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= h \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} v_x(0) &= v_0 \cos \alpha \\ v_y(0) &= v_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (40)$$

Esse sono pertanto (ricontrolla)

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos \alpha \frac{m}{k} v_0 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{k}{m} t \right) \right] \\ y(t) &= h + \frac{m^2 g}{k^2} + \frac{m^2 g}{k^2} \exp \left( - \frac{k}{m} t \right) + \frac{m g}{k} t \end{aligned} \quad (41)$$

### 2.2.1 Separazione delle variabili

Ora, come promesso, rifaremo il conto riferendoci direttamente alla velocità. Dal secondo principio della dinamica (33), avremo

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\zeta} v = g \quad (42)$$

dove è stato introdotto il parametro  $\zeta$ , con le dimensioni di un tempo, definito come

$$\zeta = \frac{m}{k} \quad (43)$$

La relazione (42) è una equazione differenziale del primo ordine nell'incognita  $v$ ; pertanto essa potrebbe essere risolta direttamente grazie alla formula generale. Tuttavia, considerando i differenziali come quantità algebriche, essa può essere integrata direttamente con la cosiddetta separazione delle variabili

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g - \frac{1}{\zeta} v} = \int_0^t dt \quad (44)$$

Ivi, indicando  $v(0) = v_0$ , si ha che

$$\frac{1}{\zeta} \ln \left[ \frac{g - \frac{1}{\zeta} v(t)}{g - \frac{1}{\zeta} v_0} \right] = t$$

e così si ottiene subito

$$v(t) = \zeta g + (g - v_0) \exp \left( - \frac{t}{\zeta} \right)$$

La forma funzionale della velocità ci mostra chiaramente che la velocità è pari a  $v_0$  all'istante iniziale  $t = 0$  mentre, quando  $t \gg \tau$  essa si stabilizza sul valore limite, raggiunto asintoticamente,

$$v_L = \tau g = \frac{mg}{k} \quad (45)$$

che è indipendente dalla velocità iniziale  $v_0$ .

Si può riscrivere la legge di velocità nella forma

$$v(t) = v_L + (v_0 - v_L) e^{-t/\tau} \quad (46)$$

Il tempo  $\tau$  dà una misura di quanto rapidamente un corpo in caduta senza paracadute, ovvero in regime di frenamento debole, raggiunge la velocità limite  $v_L$ .

Nella figura (5) mostriamo l'andamento col tempo della velocità con cui si precipita, per diversi valori della velocità iniziale  $v_0$ , in funzione della quantità adimensionale  $t/\tau$ ; notate, in particolare, che quando il corpo viene lanciato con una velocità iniziale maggiore della velocità limite, la sua velocità diminuirà progressivamente per raggiungere, asintoticamente, il valore  $v_L$ .

Un semplice ragionamento consente di ricavare direttamente il valore della velocità limite senza risolvere alcuna equazione differenziale. Supponiamo, per comodità che il moto cominci con velocità nulla: inizialmente la forza di attrito è dunque nulla e il corpo risente solo della forza di gravità, per cui precipita verso il basso con accelerazione  $g$ . All'aumentare della velocità, anche la forza di attrito aumenta fino a non essere più trascurabile e quindi l'accelerazione diminuisce. La condizione limite viene raggiunta quando la forza di attrito uguaglia esattamente, in modulo, la forza peso, per cui la risultante delle forze agenti è nulla. In queste condizioni il moto sarà rettilineo uniforme. Nell'ipotesi che l'attrito sia proporzionale alla prima potenza della velocità, si ha dall'uguaglianza delle due forze agenti che

$$kv_L = mg \Rightarrow v_L = \frac{mg}{k} \quad (47)$$

che coincide con il risultato già trovato. Analogo ragionamento può essere fatto, *mutatis mutandis*, per la discesa con il paracadute.

L'andamento dell'accelerazione può essere ottenuto direttamente derivando l'espressione (46) della velocità

$$a(t) = g - \frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (48)$$

Si vede che l'accelerazione vale  $g - v_0/\tau$  per  $t = 0$  e tende ad annullarsi con legge esponenziale governata ancora dal tempo caratteristico  $\tau$ . In figura (6) sono mostrati alcuni andamenti dell'accelerazione in funzione della variabile universale  $t/\tau$  per diversi valori della velocità iniziale  $v_0$ .

Calcoliamo infine lo spazio percorso in funzione del tempo, limitandoci, per semplicità al caso in cui si parta da fermi, ossia con  $v_0 = 0$ . L'espressione di

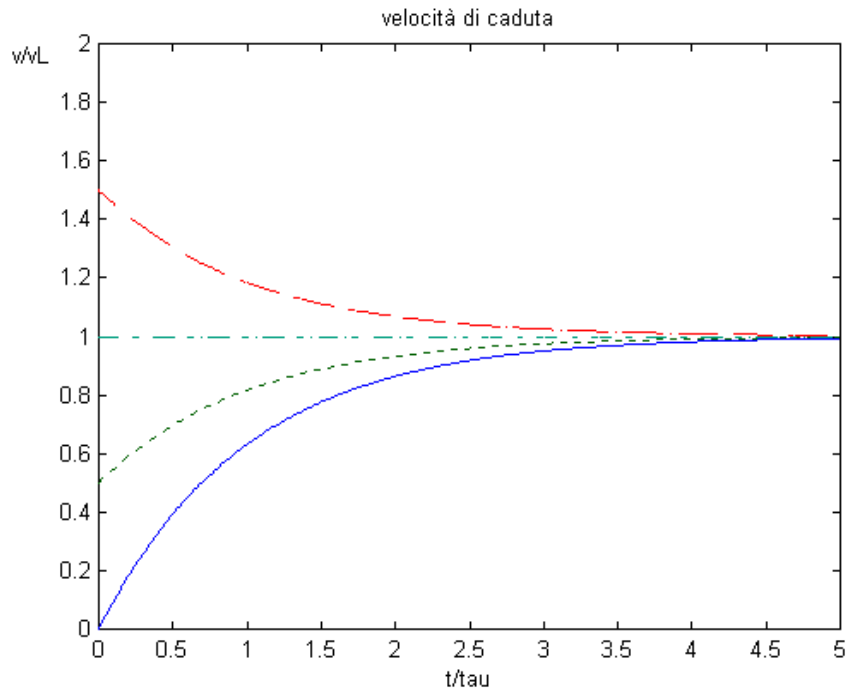


Figure 5: Andamento della velocità, normalizzata con la velocità limite, per diversi valori della velocità iniziale

$y(t)$  si ottiene ora integrando la velocità  $v(t)$  con la condizione iniziale  $y(0) = 0$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t v(t^0) dt^0 = \\
 &= v_L \left( \frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{49}$$

L'andamento della  $y(t)$  è mostrato nella figura (7), in funzione di  $t/\tau$ . Si può notare come, per valori di  $t/\tau$  molto piccoli, l'andamento sia simile a quello uniformemente accelerato che si avrebbe in assenza di forze di attrito (linea tratteggiata in figura). Questa osservazione qualitativa può essere resa quantitativa con la seguente dimostrazione in cui si sviluppa l'espressione (49) dello spazio percorso per piccoli valori di  $t/\tau$ . Esprimendo infatti lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale troncato al second'ordine, si ha

$$\exp(-t/\tau) \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + O\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$$

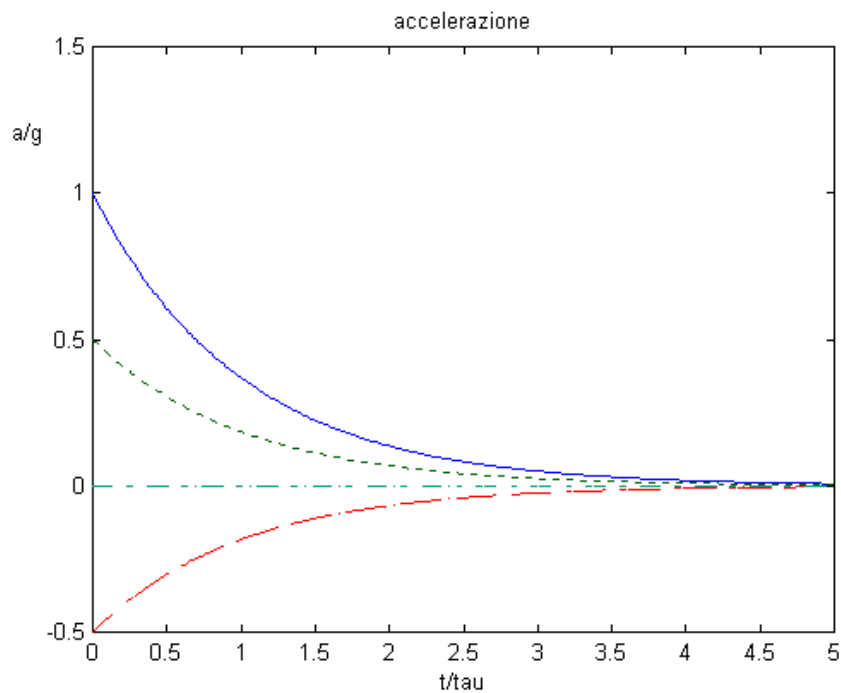


Figure 6: Andamento dell'accelerazione, normalizzata con l'accelerazione di gravità, graficato per diversi valori della velocità iniziale

e quindi

$$\begin{aligned}
 y(t) &= v_L \left( \frac{t}{\tau} + 1 \right) - \frac{1}{2} \frac{v_L}{\tau} \left( \frac{t}{\tau} + 1 \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{v_L}{\tau} t^2 = \frac{1}{2} g t^2
 \end{aligned} \tag{50}$$

Viceversa, nell'altro limite  $t/\tau \gg 1$ , l'esponenziale può essere trascurato rispetto all'unità, per cui

$$y(t) = v_L \frac{t}{\tau} = v_L \left( \frac{t}{\tau} \right) \tag{51}$$

che corrisponde ad un moto con velocità uniforme  $v_L$ , mostrato con una retta puntinata.

### 2.2.2 Teorema di conservazione

Facciamo vedere anche attraverso un teorema di conservazione, cioè il calcolo di un integrale primo, il caso del moto di caduta in un campo gravitazionale

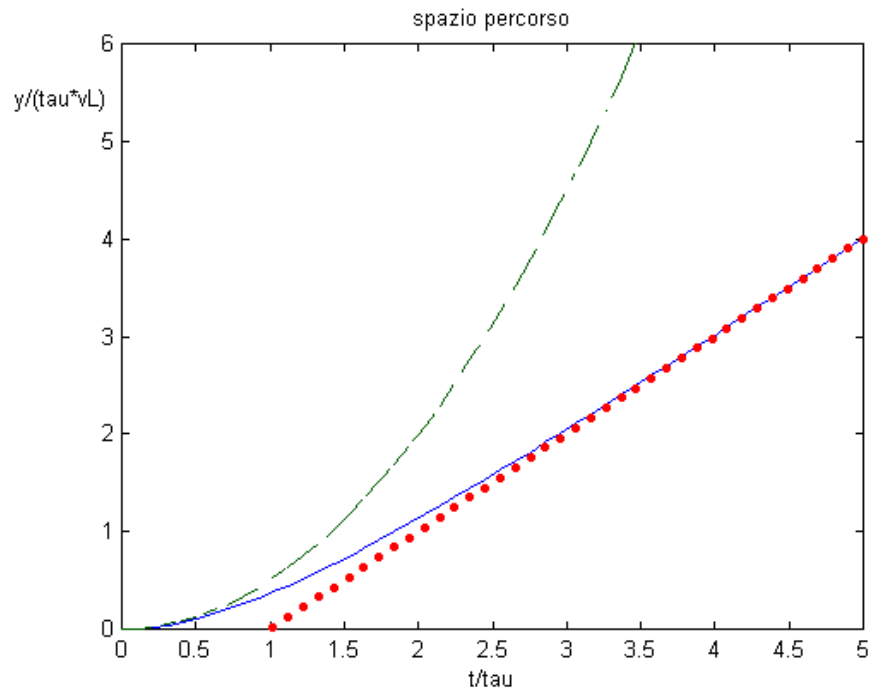


Figure 7: Spazio percorso in funzione del tempo. Sono anche mostrati gli andamenti corrispondenti al moto in assenza di attrito (curva tratteggiata) e al moto asintotico (curva puntinata)

costante e frenamento debole: dalla legge della dinamica (33) riscritta come  $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dy}{dt} = g$  otteniamo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{1}{\zeta} \frac{dy}{dt}$$

quindi

$$\frac{\zeta \frac{d}{dt} \left( \zeta \frac{dy}{dt} + g t \right)}{g \zeta \frac{dy}{dt}} = 1$$

ossia, come volevamo dimostrare,

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \zeta \frac{dy(t)}{dt} + g t \right) + \frac{1}{\zeta} = 0 \quad (52)$$

Al fine di integrare le equazioni del moto, è evidente l'utilità della formula ottenuta.

Facciamo un ultimo commento: riscrivendo la (46) come

$$v(t) = v_0 e^{i t/\zeta} + v_L \left( 1 - e^{i t/\zeta} \right) \quad (53)$$

vediamo che la velocità è la somma del contributo della velocità iniziale che decade esponenzialmente e del contributo della velocità limite che diventa quello dominante, anch'esso in maniera esponenziale e con tempo caratteristico  $\zeta$ , senza più memoria, per tempi sufficientemente grandi, del dato iniziale. In particolare per  $v_0 = 0$ , dopo un tempo pari a  $\zeta$  la velocità si è ridotta al 63,2% dopo  $2\zeta$  è al 86,5% e infine dopo già soli  $3\zeta$  è al 95,0% della velocità limite.

### 3 Moto del razzo

La propulsione di qualsiasi sistema fisico può avvenire con due meccanismi completamente differenti: tramite uno di essi, molto frequente per il nostro ambiente, un corpo si muove grazie all'azione delle forze interne del sistema e all'attrito fra le superfici di contatto con l'ambiente esterno.

Numerosi e vari sono gli esempi che si potrebbero citare, ma concettualmente basta ridursi al moto della ruota e al camminare. In questo ambito è dunque impossibile l'atto di moto quando l'attrito viene meno.

In altre situazioni, tipo il moto che avviene in mezzi fluidi, si sfrutta invece il teorema di Bernoulli attraverso dispositivi come l'elica o la vela. In tal caso il moto relativo tra un corpo solido immerso nel fluido ed il fluido stesso, attraverso la riorganizzazione delle linee di flusso attorno alla superficie alare, crea una portanza ossia una forza netta non nulla che sostiene l'elica o la vela.

Entrambe le situazioni descritte dimostrano che quando la densità del fluido diviene insufficiente cioè per moti in mezzi rarefatti o addirittura "vuoti" (pensiamo a spazi vuoti classici) non si può sfruttare nè l'attrito (camminare, fare il passo del leopardo et cetera) nè il teorema di Bernoulli (volare, navigare); l'unica maniera praticabile è allora quella di sfruttare il principio della reazione; esso è sancito dal teorema di conservazione della quantità di moto, detta anche impulso o momento lineare o semplicemente momento: in tal caso la forza interna che rende di nuovo possibile il movimento nello spazio è unicamente la quantità di moto persa nell'unità di tempo per effetto dell'espulsione di una certa quantità di massa.

In natura ci sono offerti begli esempi dal moto a reazione di seppie, calamari e simili animali marini.

Alla spinta di reazione andranno aggiunte eventuali forze esterne esercitate da altri sistemi fisici; ad esempio, qualora il moto avvenga nelle vicinanze di corpi sufficientemente massicci, dovremo considerare un'interazione gravitazionale (almeno di tipo classico) e se il volo attorno ad un pianeta avviene in un mezzo fluido che oppone una certa resistenza, un termine di attrito e le eventuali spinte idrodinamiche.

Ancora più in generale, la meccanica del movimento dei sistemi a reazione dovrà considerare le relazioni termodinamiche attraverso l'uso di opportuni parametri macroscopici come pressione, temperatura, entropia, energia interna, energia libera.

Vediamo di dare una descrizione matematica di tutto ciò.

### 3.1 Propulsione a reazione classica: aspetti meccanici

Sia  $v(t)$  la velocità del razzo nell'istante  $t$  rispetto ad un sistema di riferimento inerziale; durante un successivo intervallo di tempo elementare  $dt$  viene eiettata per la propulsione del sistema una massa infinitesima  $dm_c$  di propellente; per un tempuscolo  $dt$  tale masserella si muove a velocità costante  $v_c(t)$  rispetto al medesimo riferimento inerziale.

Indicando la massa totale del razzo al tempo  $t$  con  $m(t)$ , risulta che la quantità di moto nel medesimo istante

$$p(t) = m(t)v(t)$$

diventa, per l'espulsione del carburante

$$p(t + dt) = [m(t) - dm_c(t)][v(t) + dv(t)] + dm_c(t)v_c(t)$$

Essa si conserva, vale a dire che la sua variazione infinitesima è nulla

$$dp = p(t + dt) - p(t) \approx 0$$

se il sistema dinamico a massa variabile è isolato; è invece pari all'impulso scambiato

$$p(t + dt) - p(t) = Fdt$$

se su di esso agiscono anche delle forze esterne.

Nel nostro caso esse, trascurando gli effetti idrodinamici, saranno soprattutto l'attrazione gravitazionale terrestre e l'attrito atmosferico

$$F = F_g + F_a$$

Vediamo dunque più in dettaglio come si esplica, in via del tutto generale, il moto a reazione.

La quantità di massa espulsa fa diminuire la massa complessiva del razzo di una pari quantità

$$dm_c(t) = -dm(t)$$

quindi il teorema di conservazione del momento lineare fornisce la relazione

$$m(t) \frac{d}{dt} v(t) + [v(t) - v_c(t)] \frac{d}{dt} m(t) = 0$$

relativa ad un moto libero nello spazio extraterrestre o anche alla componente orizzontale in un volo circumterrestre. Ricordiamo che per orizzontale intendiamo in maniera naturale la componente ortogonale alla direzione locale del campo di forze.

Considerando anche le forze agenti, avremo invece la legge differenziale del moto

$$m(t) \frac{d}{dt} v(t) + [v(t) - v_c(t)] \frac{d}{dt} m(t) = F \quad (54)$$

Riscrivendo la relazione precedente nella forma

$$m(t) \frac{dv(t)}{dt} = F + [v_c(t) - v(t)] \frac{dm(t)}{dt}$$

possiamo leggere l'equazione ottenuta interpretando la seconda quantità a destra come una forza che nell'unità di tempo fornisce l'espressione esplicita dell'impulso di reazione  $[v_c(t) - v(t)] \frac{dm(t)}{dt}$ : questo è causa, per reazione, appunto, della propulsione del razzo.

Come vediamo dall'espressione di questo termine, la propulsione a reazione è determinata sia dalla quantità di massa espulsa nell'unità di tempo sia dalla velocità relativa di detta massa rispetto al missile; tuttavia dei due meccanismi fisici responsabili della propulsione uno è molto più efficiente dell'altro nel determinare il movimento; in effetti per avere grandi spinte è necessario in generale che il motore sia in grado di espellere masse a grandi velocità relative rispetto al mobile piuttosto che grandi quantità di fluidi nell'unità di tempo.

Abbiamo detto infatti che l'impulso fornito dalla reazione vale

$$F_S = [v_c(t) - v(t)] \frac{dm(t)}{dt}$$

ossia è pari al prodotto della massa espulsa nell'unità di tempo per la velocità di tale massa rispetto al razzo, pertanto indicando con

$$\dot{S} = \frac{dm(t)}{dt}$$

la cosiddetta portata massica, cioè il tasso di variazione temporale della massa, vediamo che la forza di spinta si scrive semplicemente

$$F_S = - \dot{S} u(t) \quad (55)$$

dove la velocità della massa espulsa rispetto al razzo vale

$$u(t) = v(t) - v_c(t)$$



Discutiamo possibili tecniche che, sfruttando le caratteristiche matematiche del fenomeno in istudio, migliorano l'efficienza del missile.

Se il razzo si muove nello spazio libero possiamo porre l'accelerazione di gravità  $g = 0$  di modo che la legge del moto è data dalla relazione

$$\frac{dv(t)}{dt} = i \frac{u(t)}{m(t)} \frac{dm(t)}{dt} \quad (56)$$

analoga equazione si ha considerando, nei dintorni della Terra, la componente orizzontale del moto se ogni altra forza, tipo l'attrito è nulla. Ora proiettando la (56) nella direzione del moto si ha

$$\frac{1}{u(t)} \frac{dv(t)}{dt} = i \frac{1}{m(t)} \frac{dm(t)}{dt}$$

Integrando rispetto al tempo entrambi i membri ho che

$$v(t) = u \ln \frac{m(0)}{m(t)} \quad (57)$$

di conseguenza, poichè il termine logaritmico cresce meno di una legge di potenza, per avere grandi velocità e quindi grandi altezze e quindi grandi gittate devo procurare soprattutto grandi velocità  $u$  dei gas di scarico rispetto al razzo. Ovviamente questo è un risultato di carattere generale perchè l'inclusione di qualsiasi altro termine di forza porta semplicemente delle quantità che variano con leggi di potenza: lo vedremo con maggiori dettagli discutendo lo sviluppo à la Taylor della forza gravitazionale. En passant osserviamo che nell'integrazione fatta per ottenere la (57) si è assunto che la velocità dei gas di scarico rispetto al razzo sia costante; è più realistico supporre invece che sia costante la velocità dei gas rispetto alla Terra: questo tuttavia non porta ad alterare il risultato qualitativo circa il modo di migliorare l'efficienza del motore a reazione, perchè, come si vedrà in dettaglio nel seguito, l'inclusione del corretto termine di velocità relativa, oltre a complicare inutilmente il calcolo fatto qui sopra, porta semplicemente dei termini con legge di potenza e quindi fornisce analoga conclusione.

Quando il moto avviene nel vuoto e a distanza, da altre masse, così grande da poter trascurare l'interazione gravitazionale, c'è solo il termine di spinta (55) dato dalla reazione; in caso contrario la dinamica è governata da tutte le interazioni significative. Se infatti il moto avviene in un mezzo materiale bisogna considerare anche l'espressione dell'attrito; se infine il mezzo fluido è in una regione di spazio in cui la gravità rompe l'isotropia introducendo una direzione ed un verso privilegiato, bisogna considerare tutte le relazioni idrodinamiche significative nonchè, in generale, i vincoli termodinamici: questi ultimi potranno sempre essere valutati scrivendo il termine di spinta come  $A(P_e - P_i)$  dove  $A$  è l'area su cui si esercitano le pressioni  $P_{e,i}$ .

Risolviamo ora alcuni casi specifici di interesse pratico limitandoci per il momento agli aspetti strettamente dinamici.

Attraverso reazioni chimiche ed opportuni cicli termodinamici si raggiungono abbastanza facilmente elevate velocità di espulsione di gran quantità dei

propellenti e quindi, per reazione, impulsi molto grandi; ad essi corrispondono ovviamente elevate velocità di propulsione: di conseguenza possiamo schematizzare in modo realistico l'attrito dell'aria con una legge di proporzionalità quadratica con la velocità

$$F_a = -k v^2 \mathbf{b} \quad (58)$$

dove  $k$  è la costante di proporzionalità che caratterizza complessivamente il coefficiente di attrito ed  $\mathbf{b}$  è il versore lungo la direzione del moto.

Indicando poi con  $R$  il raggio medio della Terra e con

$$s(t) = \int_0^t v(t^0) dt^0$$

la distanza dalla superficie terrestre coperta dal missile al tempo  $t$ , la forza di attrazione gravitazionale sentita dal mobile si scrive, indicando con  $s_y$  la proiezione della quota  $s(t)$  lungo la direzione  $\mathbf{b}$ , come

$$F_g = -G \frac{Mm}{(R + s_y)^2} \mathbf{b} = -G \frac{M}{R^2} \frac{mR^2}{(R + s_y)^2} \mathbf{b} = -G \frac{m(t)gR^2}{[R + s_y(t)]^2} \mathbf{b} \quad (59)$$

Usando l'espressione esplicita delle forze in gioco, l'equazione del moto si riscrive, nell'ipotesi di poter ignorare la variazione di massa della Terra alla partenza del missile, ovvero trascurando il rinculo del pianeta, come

$$\frac{dv(t)}{dt} = -G \frac{gR^2}{[R + s_y(t)]^2} \mathbf{b} - kv^2(t) \mathbf{b} - \frac{u(t)}{m(t)} \frac{dm(t)}{dt} \quad (60)$$

La relazione (60), così come, più in generale, la (54), mostra che la dinamica della propulsione a reazione è governata dalla variazione temporale di due funzioni: la velocità  $v(t)$  del missile e la legge di massa  $m(t)$ ; mi serve quindi una seconda relazione da affiancare all'equazione differenziale della dinamica (60) per descrivere in maniera completa il moto.

In altri termini posso riguardare l'equazione (54) come un sistema dinamico controllato che andrà ottimizzato mediante la funzione  $m(t)$  o una sua derivata temporale.

Senza far intervenire in modo elegante ed evidente le tecniche della teoria del controllo né il riferimento matematico di fondo su cui esse si basano, procederò con scelte più o meno intuitive per una seconda relazione differenziale.

Principalmente posso scegliere in maniera esplicita una espressione  $v = v(t)$  e trovare dalle leggi del moto la funzione  $m = m(t)$  che è necessaria per ottenere la  $v(t)$  voluta oppure, al contrario, fissare una legge per la variazione temporale della massa e trovare quale atto di moto  $v(t)$  essa determina.

Osserviamo tuttavia che, siccome un attrito realistico, come abbiamo già detto, è proporzionale al quadrato del modulo della velocità, scegliendo in maniera esplicita una legge di consumo del carburante  $m(t)$ , si ottiene, dalla

(60), una equazione differenziale di Riccati (quindi molto difficile da risolvere) per la funzione incognita  $v(t)$  anche nel caso semplice in cui l'attrazione di gravità non cambia in modo apprezzabile con l'altezza.

Per una modellizzazione analitica elementare quale è quella presentata in queste pagine sarà conveniente quindi cercare di realizzare le condizioni tecniche per cui si possa fissare il regime della velocità, cosicché le equazioni differenziali per la legge di massa siano facilmente integrabili in forma chiusa, cioè in termini finiti di funzioni elementari.

### 3.2 Moto a reazione con accelerazione costante

Mediante il controllo dei gas di scarico si può fare in modo che l'accelerazione complessiva sia costante e pari ad una proporzione  $\alpha$  dell'accelerazione gravitazionale  $g$  :

$$\frac{dv(t)}{dt} = \alpha g \mathbf{b} \quad (61)$$

In questo modo risulta subito che la traiettoria missilistica è una parabola

$$s(t) = \frac{1}{2} \alpha g t^2 \mathbf{b} \quad (62)$$

Dalla (60), proiettando il moto nel verso positivo dell'asse  $\mathbf{b}$ , trovo il necessario consumo di carburante, cioè la legge con cui deve variare la massa perché l'accelerazione del razzo sia costante

$$u \frac{1}{m(t)} \frac{dm(t)}{dt} = \alpha g + \frac{gR^2}{R + \frac{1}{2} \alpha g t^2} + k (\alpha g)^2 t^2 \quad (63)$$

Integrando quest'ultima assumendo che la velocità con cui escono i gas rispetto al missile sia costante

$$u(t) = \text{costante} \quad (64)$$

si ottiene la cosiddetta legge del rapporto di massa del missile

$$u \ln \frac{m(0)}{m(t)} = \alpha g t + gR \sqrt{t} + \frac{1}{3} k (\alpha g)^2 t^3 \quad (65)$$

nell'ipotesi che la massa della Terra abbia simmetria sferica, cioè sia distribuita in modo omogeneo in una sfera: in tal caso la forza di attrazione gravitazionale si può esprimere mediante la (59). Nella relazione precedente abbiamo indicato in modo sintetico la quantità

$$\sqrt{t} = \frac{t}{2R \sqrt{R + \frac{1}{2} \alpha g t^2}} + \frac{1}{2R^2 \zeta} \arctan \frac{\mu \sqrt{t}}{\zeta} \quad (66)$$

e l'unità di tempo caratteristico con

$$\tau = \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (67)$$

Per ottenere tale risultato si è inoltre assunto implicitamente che il missile non sposti il proprio baricentro nonostante l'espulsione del carburante, come se fosse un corpo puntiforme e che la densità dell'aria non vari in modo apprezzabile con la quota, così che l'attrito che si oppone al moto sia costante rispetto all'altezza.

Ricordiamo infine che tutto il discorso fatto fin qui non considera le relazioni termodinamiche di pressione rispetto all'esterno: ciò vuol dire idealizzare ancora una volta il motore come un dispositivo "puntiforme" descrivendo la spinta macroscopica  $A(P_e - P_i)$  da un punto di vista puramente meccanico.

Come abbiamo fatto vedere, scegliendo dunque  $v(t) = gt$  o, più in generale, una opportuna funzione  $v(t)$ , si ottiene una equazione (63) integrabile con tecniche elementari.

Riepilogando abbiamo trovato le seguenti relazioni per il moto missilistico: una legge oraria quadratica nel tempo

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad (68)$$

e quindi una velocità lineare

$$v(t) = gt \quad (69)$$

ossia un'orbita parabolica

$$v = \sqrt{2gs} \quad (70)$$

con legge di massa del tipo

$$\frac{m(0)}{m(t)} = \exp \left[ \frac{gt + gR'(t) + \frac{1}{3}k(g)^2 t^3}{u} \right] \quad (71)$$

Qui dobbiamo fare una considerazione doverosa: stiamo assumendo che l'accelerazione complessiva sentita dal razzo, cioè la quantità a dextra o a sinistra nella ( ) sia costante, così che la velocità aumenta in modo lineare con il tempo e lo spazio percorso in maniera quadratica FORMULE , tuttavia abbiamo anche supposto che la velocità dei gas all'uscita sia costante rispetto al razzo; ciò è solo un'ipotesi semplificativa dal punto di visto puramente matematico, ma non è necessaria, soprattutto dal punto di vista fisico, anzi non è molto realistica perchè, nell'ambito di una progressione lineare della velocità del missile, ciò equivale a richiedere che anche la velocità dei gas rispetto ad un sistema di riferimento inerziale aumenti in modo lineare con il trascorrere del tempo; questo, qualora sia possibile, almeno in una certa misura, da un punto di vista della fisica teorica, richiede un controllo ingegneristico per niente banale che nella pratica può essere molto complicato da realizzare o comunque con

limitazioni ancora maggiori; piuttosto considerazioni elementari di chimica e di termodinamica ci portano verso regimi matematici di funzionamento del motore a reazione più realistici: in effetti una possibile, buona, modifica all'integrazione fatta fin qui consiste semplicemente nell'assumere che non la velocità rispetto al razzo dei gas combusti sia costante, ma che sia costante la velocità dei gas forniti dal progredire della reazione chimica rispetto alla Terra; non è difficile modificare il calcolo fatto fin qui, ma lo faremo più in là riottenendo la corretta legge di variazione della massa necessaria perchè tutto questo si realizzi.

Facciamo invece delle considerazioni sull'espressione generale (59) della forza gravitazionale: usando lo sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{(1 + \hat{A})^2} = 1 - 2\hat{A} + 3\hat{A}^2 + O(\hat{A}^3)$$

$$\hat{A} = \frac{s}{R}$$

vediamo che l'assunzione  $g = \text{costante}$  corrisponde all'approssimazione d'ordine zero

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - kv^2(t) - \frac{u(t)}{m(t)} \frac{dm(t)}{dt}$$

Essa, per un moto parabolico, fornisce la seguente legge del rapporto di massa

$$u \ln \frac{m(0)}{m(t)} = (\alpha + 1)gt + \frac{1}{3}k(\alpha g)^2 t^3 \quad (72)$$

Invece al prim'ordine (cioè  $s \ll R$ ) risulta  $F_g = mg - 2mg \frac{s}{R}$  da cui

$$u \ln \frac{m(0)}{m(t)} = (\alpha + 1)gt + \frac{1}{3} \frac{\mu}{R} k \alpha^2 g^2 t^3 \quad (73)$$

e così via, in maniera del tutto banale, per termini d'ordine superiore: avremo, a destra, sempre altre quantità con leggi semplici di potenza.

Ricordando dunque quanto avevamo anticipato sulla maniera di ottimizzare il motore a reazione e quanto detto sul comportamento della funzione logaritmo, deduciamo che nella situazione descritta è essenziale soprattutto ottenere grandi velocità di scarico.

Prima di passare oltre, osserviamo che per missili con gittate di centinaia di chilometri o, al limite, addirittura intercontinentali, è ragionevole supporre che la forma del volo sia simile ad una a stati legati, magari di tipo kepleriano: di conseguenza la traiettoria, approssimata fin qui con un arco parabolico, potrebbe essere piuttosto un'arco di ellisse percorso secondo la legge della costanza della velocità areolare; quest'ultima, a sua volta, deriva dalla costanza del momento angolare e in definitiva dal fatto che la forza gravitazionale è (approssimativamente) radiale.

Si tenga presente, tuttavia, che in tal caso, per una descrizione veramente corretta e soprattutto per un controllo accurato del missile, non ci si può accontentare della schematizzazione di Terra idealmente sferica cioè con densità di

massa omogenea; piuttosto vanno considerati ulteriori termini correttivi nello sviluppo del potenziale gravitazionale effettivo, tipo il termine tecnicamente chiamato  $J^2$ , che danno una descrizione più accurata del geoide: questo vuol dire che, fermo restando la conservazione del momento angolare, non vale la legge di costanza della velocità areolare e la traiettoria non è una sezione conica.

### 3.3 Motore a reazione con accelerazione costante e velocità allo scarico costante

Vediamo di correggere l'integrazione della legge del moto considerando una velocità costante dei gas di scarico rispetto alla Terra piuttosto che rispetto al razzo. Dalla (63) si ottiene

$$\ln \frac{m(0)}{m(t)} = \int_0^t \left[ \frac{g}{gt_i - v_c} + \frac{kgt^2}{(gt_i - v_c)} + \frac{gR^2}{(gt_i - v_c) \left( R + \frac{1}{2}gt^2 \right)^2} \right] dt$$

Questi tre integrali esprimono la legge di massa per un missile con un motore a reazione capace di imprimere un'accelerazione costante con una velocità dei gas  $v_c$  rispetto al sistema di riferimento inerziale della Terra pure costante, quindi tale che aumenta, o meglio, diminuisce con il trascorrere del tempo rispetto al razzo. Il primo ed il secondo termine sono banali, il terzo è un po' lungo, qui lo risolveremo.

Cominciamo dal primo

$$\int_0^t \frac{dt}{gt_i - v_c} = \int_0^t \frac{dt}{t_i - b} = \ln |t_i - b|$$

Vediamo ora il secondo

$$k \int_0^t \frac{t^2 dt}{gt_i - v_c} = \frac{k}{g} \int_0^t \frac{t^2 dt}{t_i - b} = k \left[ \frac{1}{2} (t_i - b)^2 + 2b(t_i - b) + b^2 \ln |t_i - b| \right]$$

dove il parametro  $b = \frac{v_c}{g}$  è un tempo che può essere dell'ordine di qualche centinaio di secondi, tipicamente 50 s o più. Il risultato ottenuto si può riscrivere, a meno di una inessenziale costante di integrazione, nella forma

$$k \int_0^t \frac{t^2 dt}{t_i - b} = k \left[ bt + \frac{1}{2}t^2 + b^2 \ln |t_i - b| \right]$$

Vediamo finalmente il terzo termine

$$\begin{aligned} gR^2 \int_0^t \frac{dt}{(gt_i - v_c) \left( R + \frac{1}{2}gt^2 \right)^2} &= gR^2 \int_0^t \frac{dt}{(t_i - b) (t^2 + a^2)^2} = \\ &= \frac{4}{g^3} \frac{\mu R}{g} I_2(t) \end{aligned}$$

dove nell'integrale  $I(t) = \int f(t) dt$  l'integrando si dovrà spezzare nei seguenti termini

$$f(t) = \frac{1}{(t - b)(t^2 + a^2)^2} = \frac{A}{t - b} + \frac{M_1 t + N_1}{t^2 + a^2} + \frac{M_2 t + N_2}{(t^2 + a^2)^2} + \frac{N(t)}{(t - b)(t^2 + a^2)^2}$$

con coefficienti da determinare in base al fatto che

$$N(t) = A(t^2 + a^2)^2 + (M_1 t + N_1)(t^2 + a^2) + (M_2 t + N_2)(t - b) = 1$$

Abbiamo indicato sinteticamente i seguenti coefficienti temporali con

$$a^2 = 2 \frac{R}{g}$$

e, come già detto,

$$b = \frac{V_c}{g}$$

osserviamo che questi parametri sono tempi: essi individuano perciò delle unità di tempo intrinseche del fenomeno in studio rispetto alle quali vengono discriminate le dinamiche lente da quelle veloci. In particolare, la fortunata dipendenza da quantità "grandi" come il raggio della Terra  $R$  e la velocità  $V_c$  dei gas espulsi, fa sì che essi determinano delle scale naturali di tempo dell'ordine del migliaio di secondi cioè molto grandi rispetto alla durata tipica di funzionamento del motore: si potrà quindi sviluppare in serie di Taylor l'espressione che otterremo dei vari termini che contribuiscono alla legge di consumo del carburante necessaria per ottenere, lo ricordiamo, una accelerazione complessiva costante del razzo nella situazione indicata, ricavandone così una valutazione che nella pratica non differisce dal risultato esatto ma è molto più maneggevole di quest'ultimo. Anticipiamo che l'approssimazione che otterremo sarà semplicemente fatta di un termine costante più uno lineare nel tempo; avremo così una legge molto semplice che porterà a studiare un efflusso lineare della massa con il progredire del tempo.

Inoltre anche i pesi di ciascuna termine approssimato si potranno sviluppare...

$$\int \frac{dt}{(t-b)(t^2+a^2)^2} = \frac{a^2-bt}{2a^2(a^2+b^2)(a^2+t^2)} + \frac{(-3a^2b-b^3)\text{ArcTan}\left[\frac{t}{a}\right]}{2a^2a(a^2+b^2)^2} + \frac{\text{Log}[-b+t]}{(a^2+b^2)^2} - \frac{\text{Log}[a^2+t^2]}{2(a^2+b^2)^2}$$

$$\int \frac{t^2 dt}{(t-b)} = bt + \frac{t^2}{2} + b^2 \text{Log}[-b+t]$$

$$\int \frac{t^2 dt}{(t-b)} + \int \frac{dt}{(t-b)(t^2+a^2)^2} = bt + \frac{t^2}{2} + \frac{a^2-bt}{2a^2(a^2+b^2)(a^2+t^2)} + \frac{(-3a^2b-b^3)\text{ArcTan}\left[\frac{t}{a}\right]}{2a^2a(a^2+b^2)^2} + b^2 \text{Log}[-b+t]$$

$$+ \frac{\text{Log}[-b+t]}{(a^2+b^2)^2} - \frac{\text{Log}[a^2+t^2]}{2(a^2+b^2)^2}$$

DA QUI IN POI PER CONFUSIONE CON UN ALTRO LAVORO C'E' UN ERRORE DI CONTO PER CUI, FERMO RESTANDO LA CORRETTEZZA CONCETTUALE DELLO SVILUPPO ILLUSTRATO, IL RISULTATO QUANTITATIVO RAAGIUNTO ALLA FINE DEL PARAGRAFO E' SBAGLIATO

Per determinare i vari coefficienti cominciamo con l'annullare i primi due termini imponendo  $t = \text{Sia}$

$$N(ia) = 1$$

$$N(jia) = 1$$

La coppia di valori soluzione del problema è allora

$$M_2 = \frac{\Phi_{M_2}}{\Phi}$$

$$N_2 = \frac{\Phi_{N_2}}{\Phi}$$

come si ottiene dal seguente sistema algebrico lineare

$$\begin{cases} a(a+ib)M_2 + (b-ia)N_2 = 1 \\ a(a-ib)M_2 + (b+ia)N_2 = 1 \end{cases}$$

di due equazioni nelle incognite  $M_2; N_2$  essendo

$$\begin{aligned} \Phi_{M_2} &= \begin{vmatrix} 1 & (b-ia) \\ 1 & (b+ia) \end{vmatrix} = 2ia \\ \Phi_{N_2} &= \begin{vmatrix} a(a+ib) & 1 \\ a(a-ib) & 1 \end{vmatrix} = 2iab \\ \Phi &= \begin{vmatrix} a(a+ib) & i(a+ib) \\ a(a-ib) & i(a-ib) \end{vmatrix} = 2ia^2 + b^2 \end{aligned}$$



Calcolando nella maniera indicata si trovano i valori

$$M_2 = i \frac{1}{a^2 + b^2}$$

$$N_2 = i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Poi valutiamo

$$N(0) = a^4 A + a^2 N_1 + b N_2 = 1$$

$$N(b) = i \frac{1}{a^2 + b^2} A + b i \frac{1}{a^2 + b^2} M_1 + i \frac{1}{a^2 + b^2} N_1 = 1$$

$$N(i b) = i \frac{1}{a^2 + b^2} A + b i \frac{1}{a^2 + b^2} M_1 + i \frac{1}{a^2 + b^2} N_1 = 1$$

così dovremo risolvere un sistema algebrico lineare nelle tre incognite  $M_1$ ,  $A$ ,  $N_1$ ; data la fortunata struttura dei coefficienti numerici delle equazioni, procediamo con scaltrezza e celerità sottraendo membro a membro la terza relazione dalla seconda in quanto si vede ad occhio che  $N(b) - N(i b) = 2b i \frac{1}{a^2 + b^2} M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 0$

Ci siamo dunque risparmiato di calcolare i determinanti di due matrici tre per tre; per le successive incognite non potremo evitarlo, ma è quanto di meglio si poteva fare.

Dunque

$$M_1 = 0$$

Infine avremo da calcolare soltanto

$$A = \frac{\Phi_A}{\Phi}$$

$$N_1 = \frac{\Phi_{N_1}}{\Phi}$$

dove ovviamente il determinante della matrice dei coefficienti del sistema algebrico vale

$$\Phi = \begin{vmatrix} i a^2 + b^2 & b i a^2 + b^2 & i a^2 + b^2 \\ a^4 & 0 & a^2 \\ i a^2 + b^2 & i b i a^2 + b^2 & i a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 2a^2 b^3 i a^2 + b^2$$

Visto che banalmente

$$\Phi_A = \begin{vmatrix} 1 & b i a^2 + b^2 & i a^2 + b^2 \\ i \frac{b^2}{a^2 + b^2} & 0 & a^2 \\ 1 & i b i a^2 + b^2 & i a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 2b i a^2 + b^2$$

si ricava

$$A = \frac{1}{a^2 b^2}$$

infine

$$\mathcal{C}_{N_1} = \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} i \\ a^2 + b^2 \end{array} \begin{array}{c} i \\ a^2 + b^2 \end{array} \begin{array}{c} i \\ a^2 + b^2 \end{array} \\ a^4 \quad 0 \quad \frac{i b^2}{a^2 + b^2} \\ \begin{array}{c} i \\ a^2 + b^2 \end{array} \begin{array}{c} i \\ a^2 + b^2 \end{array} \begin{array}{c} i \\ a^2 + b^2 \end{array} \end{array} = i 2b^i a^6 + 2a^4 b^2 + 2a^2 b^4 + b^6 \mathcal{C}$$

quindi

$$N_1 =$$

infine

$$\begin{aligned} I &= A \ln |j t - b| + \frac{N_1}{a} \arctan \frac{t}{a} + M_2 \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^2} + N_2 \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} = \\ &= A \ln (b - j t) + \frac{N_1}{a} \arctan \frac{t}{a} + M_2 \frac{1}{2(t^2 + a^2)} + \\ &\quad + N_2 \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{t}{a} \end{aligned}$$

In vista degli sviluppi successivi, riscrivo l'integrale ottenuto come (attenzione, ricontrolla le dimensioni ...sicche ritornando all'integrale iniziale, quello di cui I è solo il terzo contributo, sennò riskia ke viene male)

$$\begin{aligned} I &= A \ln b + A \ln \left( 1 - j \frac{t}{b} \right) + \frac{N_1}{a} + \frac{1}{2} \frac{N_2}{a^3} \arctan \frac{t}{a} + \frac{1}{2} \frac{M_2}{a^2} \frac{1}{\left( \frac{t^2}{a^2} + 1 \right)} + \frac{1}{2} \frac{N_2}{a^3} \frac{\frac{t}{a}}{\left( \frac{t^2}{a^2} + 1 \right)} = \\ &= A \ln b + A \ln (1 - j \frac{t}{b}) + \frac{N_1}{a} + \frac{1}{2} \frac{N_2}{a^3} \arctan \left( j \frac{t}{a} \right) + \frac{1}{2} \frac{M_2}{a^2} \frac{1}{\left( \frac{t^2}{a^2} + 1 \right)} + \frac{1}{2} \frac{N_2}{a^3} \frac{j}{\left( \frac{t^2}{a^2} + 1 \right)} \end{aligned}$$

mettendo tutto insieme trovo

(74)

A questo punto faccio i necessari sviluppi in serie...

(75)

Abbiamo così dimostrato che il moto del razzo capace di esibire una accelerazione complessiva costante, e quindi una traiettoria parabolica, in un campo di gravità kepleriano ed in presenza di un forte attrito, esige una legge di consumo del carburante che con buona approssimazione si può ritenere lineare nel tempo qualora la dinamica a reazione sia sufficientemente veloce, cioè si svolga per tempi di funzionamento del motore a reazione sufficientemente brevi rispetto ai parametri cinetici espressi sinteticamente come  $a; b$ .

### 3.4 Riformulazione termodinamica della propulsione a reazione: i fondamenti

Fin qui abbiamo descritto la propulsione a reazione con un formalismo in cui il sistema a massa variabile non viene trattato da un punto di vista macroscopico in modo esplicito: prima di procedere oltre riscriviamo dunque le equazioni fondamentali del razzo nell'ambito della termodinamica. La termodinamica infatti è una branca della fisica di validità del tutto generale che ha un'origine fenomenologica nei sistemi macroscopici e trova il suo fondamento teorico nella meccanica statistica.

Prima di affrontare il ciclo termodinamico del motore a reazione, discutiamo l'espressione delle forze in gioco da un punto di vista macroscopico, ossia come pressione, essendo la pressione nient'altro che una forza per unità di superficie.

In generale potremo considerare costante la pressione esercitata dal razzo mentre sarà variabile, almeno con la quota, secondo un qualche modello termodinamico, quella esterna: ad esempio usando la descrizione di Stevin e facendo opportune assunzioni termodinamiche, si potrebbe ricavare facilmente un'espressione della legge barometrica per la densità e la pressione atmosferica cui è sottoposto il missile; tuttavia anche per pressioni esterne costanti, valide per piccole quote, si ottengono conclusioni importanti ed utili.

Prescindendo da una descrizione dettagliata dei termini di pressione, riscriviamo dunque il solo termine di accelerazione che subisce il razzo nelle ( ) come

$$A(P_u - P_1)$$

dove  $A$  indica l'area dell'ugello di uscita,  $P_u$  la pressione del gas all'uscita e  $P_1$  la pressione dell'ambiente esterno. In questo modo la spinta complessiva si riscrive

$$F = \dot{m}v_u + A(P_u - P_1) \quad (76)$$

dove  $\dot{m}$  è il tasso con cui fluisce la massa espulsa del razzo e  $v_u$  la velocità di moto di tale massa.

Facciamo alcune considerazioni sull'ultima espressione ottenuta.

Definendo la quantità

$$C = v_u + \frac{A(P_u - P_1)}{\dot{m}}$$

vediamo che essa ha le dimensioni di una velocità e la sua espressione suggerisce di interpretarla come una velocità di espulsione effettiva. La legge del moto a reazione si riscrive dunque come

$$F = \dot{m}C \quad (77)$$

Poichè la pressione atmosferica decresce con l'altezza fino a che  $P_1$  diventa trascurabilmente piccola, vediamo che la spinta del motore a reazione aumenta con l'altitudine. Il rendimento dunque migliora all'aumentare della quota fino al

raggiungimento del limite dell'atmosfera, contrariamente a qualsiasi motore ad elica o a vela che, proprio perchè ha bisogno di un fluido attorno a sè, peggiora al rarefarsi del mezzo attraverso cui si muove e cessa completamente di funzionare nello spazio vuoto.

Ricordiamo che la massa  $M$  di un corpo è quella caratteristica, quell'etichetta, che esprime l'inerzia del corpo stesso, cioè la sua attitudine a cambiare il proprio stato di moto sotto l'azione di una forza; essa, per il principio di equivalenza, descrive la proprietà del corpo di generare una forza di attrazione accelerando un altro corpo a distanza  $R$  secondo la relazione di Newton

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Pertanto una massa  $m$  immersa in campo gravitazionale  $g$  generato da un'altra massa  $M$ , cioè sottoposta all'attrazione generata da  $M$ , acquista un peso  $mg$ ; pertanto la quantità

$$\frac{F}{mg}$$

esprime, nel limite in cui si può trascurare la variazione di  $g$  con la quota, il tasso di variazione del peso del missile, cioè il tasso con cui fluisce il peso del sistema a massa variabile per l'espulsione del propellente e per il fatto che il fenomeno avviene in un campo gravitazionale.

Si definisce impulso specifico il rapporto tra la forza complessiva sperimentata dal missile e la velocità di variazione del peso

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}g} \quad (78)$$

esso ha le dimensioni di un tempo ed è una misura della potenza del propellente, cioè dell'energia in esso contenuta per unità di tempo, e di quanto efficientemente essa viene convertita in spinta.

Da considerazioni sul ciclo termodinamico effettuato da un motore a reazione con propellente gassoso, cioè razzi chimici, risulta che l'impulso specifico è proporzionale alla radice quadrata del rapporto tra la temperatura  $T_c$  della camera di combustione ed il peso molecolare medio  $\bar{M}$  dei gas espulsi: la costante di proporzionalità, che chiameremo  $K$ , dipende, secondo una relazione che non discuteremo, dal rapporto dei calori specifici dei gas combusti e del rapporto di pressione del motore. Pertanto si può esprimere l'impulso specifico per un razzo chimico come

$$I_{sp} = K \sqrt{\frac{T_c}{\bar{M}}}$$

Questa importante relazione mostra che possiamo massimizzare l'impulso specifico accordando la più alta temperatura possibile con il più basso peso molecolare medio dei prodotti di combustione.

La ( ) sembra suggerire che la spinta complessiva più grande possibile si ottenga quando la pressione dei gas all'uscita è maggiore della pressione ambiente. ma ciò è ingannevole perchè in tal caso la velocità con cui si allontanano i gas all'esterno del missile si riduce, determinando una perdita della spinta totale. In effetti la spinta più grande si ottiene quando la pressione di uscita uguaglia la pressione dell'ambiente esterno al motore cioè del fluido attraverso cui si sposta il razzo.

Altre due fondamentali cifre di merito con cui valutare le prestazioni del razzo sono la velocità caratteristica  $C^*$  ed il coefficiente di spinta  $C_f$  ; la prima è definita come

$$C^* = \frac{P_c A_t}{\dot{m}}$$

dove  $P_c$  è la pressione della camera di combustione ed  $A_t$  l'area della gola dell'ugello. La velocità caratteristica è dunque una misura dell'energia disponibile dal processo di combustione.

Il coefficiente di spinta è una misura dell'efficienza di conversione dell'energia nella velocità con cui si allontanano i gas propulsi

$$C_f = \frac{F}{P_c A_t}$$

e quindi caratterizza le prestazioni dell'ugello.

Il prodotto di queste due cifre di merito, diviso per la costante di gravità, fornisce l'impulso specifico

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}g} = \frac{C^* C_f}{g}$$

Una misura primaria delle prestazioni del sistema di propulsione è data dalla variazione di velocità che esso può produrre: in base alla ( ) potremo valutarla come

$$\Delta V = g I_{sp} \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (79)$$

dove  $m_f$  è la massa finale del veicolo,  $m_0$  la massa iniziale del veicolo,  $m_p$  la massa di propellente consumato ed  $R = m_0/m_f$  il rapporto di massa del missile. L'espressione scritta dell'incremento di velocità è un caso limite ideale perchè assume perdite nulle dovute all'attrito e alla gravità; di tali perdite si può tener conto valutando un'espressione termodinamica della pressione al variare della quota. Riscritta come

$$m_p = m_f e^{\frac{\Delta V}{I_{sp}g}} = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp}g}} \quad (80)$$

la ( ) fornisce la massa di propellente richiesta per un dato incremento  $\Delta V$  di velocità: in questa forma possiamo calcolare la massa di propellente richiesta sulla base o della massa iniziale o della massa finale.

Inoltre il carico di propellente  $m_p$  si può stimare dalla richiesta di impulso totale  $I_t$

$$m_p = \frac{I_t}{g I_{sp}} \quad (81)$$

dove  $g$ , al solito, è l'accelerazione di gravità, ed  $I_{sp}$  l'impulso specifico. Conoscendo la massa di propellente, determiniamo il volume necessario dividendo la massa per la densità del propellente.

### 3.5 Razzo multistadio

Il motore a reazione multistadio permette di migliorare l'efficienza del missile e quindi anche la capacità del carico pagante, qualora sia richiesto un cambiamento di velocità  $\Phi V$  molto grande. Infatti in un razzo multistadio il propellente è immagazzinato in serbatoi più piccoli e separati piuttosto che in un singolo e massiccio contenitore come nel razzo a singolo stadio; siccome ogni serbatoio viene rilasciato via quando è vuoto, non viene spesa energia per accelerare contenitori ormai vuoti, ottenendo così, dalla "medesima" quantità di carburante, solo frazionata in più "pezzi", una spinta maggiore cioè un incremento totale di velocità  $\Phi V$  più grande. In alternativa, a parità di  $\Phi V$  totale, il razzo multistadio permette di accelerare una massa di carico pagante maggiore, oppure, a parità di carico utile e di gittata, consente un ovvio risparmio di carburante.

Le prestazioni del motore a reazione multistadio sono descritte dalle stesse equazioni del monorazzo, determinate però da un'analisi stadio per stadio.

L'incremento di velocità  $\Phi V_i$  per lo stadio  $i$ -esimo si calcola come

$$\Phi V_i = g I_{sp} \ln \frac{m_{0i}}{m_{fi}} \quad (82)$$

dove  $m_{0i}$  rappresenta la massa totale del veicolo quando è acceso lo stadio  $i$ -esimo ed  $m_{fi}$  è la massa totale del veicolo quando lo stadio  $i$ -esimo è "bruciato" completamente ma non ancora rilasciato. E' importante sottolineare che la massa di "carico utile" per ogni stadio consiste della massa di tutti gli stadi seguenti più il definitivo carico pagante stesso. L'incremento totale di velocità del veicolo a reazione è pertanto la somma delle accelerazioni dei singoli stadi

$$\Phi V_{totale} = \sum_{i=1}^n \Phi V_i \quad (83)$$

dove  $n$  è il numero totale di stadi.

Si definisce frazione di carico pagante  $\lambda$ , il rapporto della massa del carico utile  $m_{p=l}$  alla massa iniziale  $m_0$ : per l'intero veicolo si scrive

$$\lambda = \frac{m_{p=l}}{m_0} \quad (84)$$

mentre per ogni singolo stadio

$$\lambda_i = \frac{m_{p=i}}{m_{0i}} \quad (85)$$

dove al solito  $i$  indica l'  $i$ -esimo stadio; si deve ricordare che il carico pagante per ogni stadio include la massa di tutti gli stadi successivi. La frazione di carico pagante del veicolo complessivo è quindi il prodotto di quelle dei singoli stadi

$$\lambda = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (86)$$

ossia è in relazione logaritmica con...

Un'altra caratteristica importante è la frazione di struttura

$$\sigma_{si} = \frac{m_{si}}{m_{0i}} = \frac{m_{si}}{m_{pi} + m_{si} + m_{p=i}} \quad (87)$$

dove  $m_s = m_f + m_{p=i} = m_{0i} - m_{p=i} - m_p$  ed  $m_p$  è la massa del propellente. Notate che il rapporto di massa  $R_i$  per l'equazione (87) è legato alle frazioni di struttura e di carico utile dalla relazione

$$\frac{1}{R_i} = \lambda_i + \sigma_{si} \quad (88)$$

Si può così determinare l'incremento di velocità  $\Phi v_i$  per ogni stadio conoscendo l'impulso specifico  $I_{sp}$ , le frazioni di carico utile  $\lambda_i$ , e le frazioni di struttura  $\sigma_{si}$ .

Si dice che un veicolo multistadio con motori diversi per quanto riguarda la tecnica costruttiva è costituito da stadi simili se ciascuno stadio ha identico impulso specifico, frazione di carico pagante e frazione di struttura: per un tale veicolo la frazione di carico pagante assume il valore massimo qualora ciascun motore fornisca lo stesso incremento di velocità.

**DEVO INVENTARMI UNA DIMOSTRAZIONE NON DOVREBBE ESSERE DIFICILE**

Ancora una volta sottolineiamo che la frazione di carico utile si calcola come

$$\lambda_i = \sigma_{si} + \exp \left[ -\frac{\mu}{I_{sp} g} \Phi v_{totale} \right] \quad (89)$$

e la frazione di carico pagante complessiva del veicolo è semplicemente

$$\lambda = (\lambda_i)^n \quad (90)$$

Per un veicolo multistadio con motori dissimili la frazione di carico pagante del veicolo complessivo dipende da come è partizionata fra i diversi stadi la richiesta di spinta  $\Phi v_{totale}$ ; le frazioni di carico pagante si possono ridurre se l'incremento complessivo di velocità è frazionato almeno in modo subottimale, come dimostrato dalle tecniche analitiche: si può riassumere dicendo che per massimizzare la frazione di carico pagante per un dato incremento di velocità si deve ottemperare alle seguenti richieste:

1. Gli stadi con impulsi specifici maggiori dovrebbero essere posti in cima agli stadi con minori impulsi specifici
2. Un maggiore incremento di velocità dovrebbe essere ottenuto dagli stadi con i maggiori impulsi specifici
3. Ciascuno stadio dovrebbe essere più piccolo del precedente
4. Stadi simili dovrebbero fornire identico incremento di velocità

### 3.6 Motore a reazione con spinta costante

Torniamo ora a delle considerazioni puramente meccaniche riguardo ad un nuovo regime di funzionamento del motore. Guardando l'espressione

$$[v_c(t) - v(t)] \frac{dm(t)}{dt}$$

dell'impulso ottenuto dalla reazione, si può pensare anche di scegliere una accelerazione del razzo che corrisponda a fissare congiuntamente una combinazione opportuna delle due funzioni  $v(t)$  ed  $m(t)$ ; ad esempio facendo in modo che la spinta sia costante

$$S = [v_c(t) - v(t)] \frac{dm(t)}{dt} \quad (91)$$

In questo modo si ottiene, per accelerazioni gravitazionali costanti, che la velocità raggiunta dal razzo all'istante di spegnimento del motore, in funzione della durata  $t$  della spinta, vale

$$v_1 = v_b \frac{1 - e^{-2t/\zeta}}{1 + e^{-2t/\zeta}} = \quad (92)$$

$$= v_b \tanh \frac{t}{\zeta} \quad (93)$$

$$v_b = \frac{r}{k} \frac{S - mg}{m} \quad (94)$$

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{2kv_b}{m} = \frac{1}{m} \frac{P}{(S - mg)k} \quad (95)$$

dove  $S$  è la spinta del motore in Newton,  $m$  la massa del razzo in kg,  $k = \frac{1}{2}cA$  la costante di accoppiamento della forza di attrito,  $A$  l'area della sezione del razzo in  $m^2$ ,  $c$  il coefficiente di attrito che tipicamente vale  $0,75$ ,  $\rho = 1,22 \text{ kg/m}^3$  la densità media dell'aria a  $45^\circ$  di latitudine al livello del mare e  $\zeta$  la consueta scala di tempo naturale. Indicando con  $I$  l'impulso fornito dal motore in Newton  $\cdot$  s, il tempo di funzionamento del motore in s, chiamato anche impulso specifico, vale  $t^* = I/S$  ed è determinato dalle caratteristiche termodinamiche del ciclo di combustione impiegato. Ponendo dunque  $t = t^*$  nelle formule precedenti si può trovare la velocità raggiunta dal missile all'uscita della fase di spinta, cioè allo spegnimento del motore.



Diamo qualche esempio numerico con riferimento ad alcuni casi ormai storici: il primo stadio del razzo Saturno V che Von Braun derivò dalle sue precedenti V2 e con cui mandò gli americani sulla Luna, sviluppava una spinta (in unità tecniche) di 3400 tonnellate ossia qualcosa come 33:354:000 N in qualche centinaio di secondi, equivalente a potenze di molti milioni di cavalli-vapore.

Gli impulsi specifici derivabili dalla combustione di poliuretani o altre materie plastiche con perclorati o con nitrati e utilizzando come additivo polvere di alluminio vanno infatti da 170 s a 210 s ; nella camera di combustione si sviluppano pressioni di 200 ÷ 300 atm e temperature intorno ai 3000 °C . Nel caso invece di propellenti liquidi l'impulso specifico è ancora più elevato, variando dai 240 s della coppia acido nitrico-dimetilidrazina a circa 500 s ottenuto bruciando ozono ed idrogeno liquidi; le velocità di eiezione dei gas variano dai 3000 m/s per le coppie ad ossigeno liquido e cherosene o perossido di azoto e dimetilidrazina, agli oltre 4100 m/s per il sistema che brucia ossigeno liquido ed idrogeno liquido.

Per ottenere le formule precedenti basta scrivere la seconda legge della dinamica proiettandola direttamente sull'asse del moto

$$m \frac{dv}{dt} = S_i - mg_i - kv^2 \quad (96)$$

da cui per separazione di variabili si ottiene

$$dt = \frac{m dv}{S_i - mg_i - kv^2} = \frac{m}{k} \frac{dv}{v_b^2 - v^2}$$

che va poi soltanto banalmente integrata. L'altezza  $s_1$  raggiunta allo spegnimento si ricava, in maniera del tutto analoga, dall'equazione

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds} = S_i - mg_i - kv^2 \quad (97)$$

separata in

$$ds = \frac{m v dv}{S_i - mg_i - kv^2}$$

e integrata con estremi

$$\int_0^{s_1} ds = \int_0^{v_1} \frac{m v dv}{S_i - mg_i - kv^2}$$

cosicchè

$$s_1 = \frac{1}{2} \frac{m}{k} \ln \frac{S_i - mg_i}{S_i - mg_i - kv_1^2} \quad (98)$$

La distanza ulteriore, detta di crociera, percorsa dallo spegnimento del motore fino all'apogeo viene infine da

$$m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{ds} = -kv^2 \quad (99)$$

che dopo separazione fornisce

$$ds = \frac{mvdv}{mg + kv^2}$$

ora gli estremi di integrazione sono però

$$S_c = \int_{s_1}^{Z_{\text{apogeo}}} ds = \int_{v_1}^{Z_0} \frac{mvdv}{mg + kv^2}$$

e quindi

$$S_c = \frac{1}{2} \frac{m}{k} \ln \frac{mg + kv_1^2}{mg} \quad (100)$$

Attenzione, quindi: non si può porre direttamente  $S = 0$  nelle formule relative al volo spinto dal motore, perchè gli estremi di integrazione vanno invertiti per essere usate anche per il regime di crociera. L'apogeo, che è l'altezza massima raggiunta, vale dunque  $s_1 + S_c$ . L'intervallo di tempo  $t_c$  di crociera necessario per raggiungere la massima quota, ossia il punto in cui la velocità è nulla, a partire dalla velocità  $v_1$  allo spegnimento, si ricava da

$$m \frac{dv}{dt} = mg + kv^2 \quad (101)$$

con l'ovvia separazione

$$dt = \frac{m dv}{mg + kv^2}$$

e successiva integrazione

$$t_c = \frac{m}{k} \arctan \frac{\sqrt{mg + kv_1^2}}{\frac{v_1}{k}} \quad (102)$$

Il tempo totale del volo sarà dunque  $t + t_c$ .

Se il razzo ha più stadi, diciamo  $k$  stadi, allora, nell'ipotesi di poter schematizzare l'accelerazione di gravità, le spinte complessive fornite singolarmente dai vari motori e la densità dell'aria mediante l'approssimazione di valori costanti

a tratti, le formule precedenti si generalizzano, per gli  $n = 1; 2; \dots; k$  stadi, così

$$v_n = v_{b_n} \frac{\frac{\mu}{\zeta_n} \exp\left(-\frac{\mu}{\zeta_n} t_n\right)}{\frac{\mu}{\zeta_n} + \exp\left(-\frac{\mu}{\zeta_n} t_n\right)} = \quad (103)$$

$$= v_{b_n} \frac{(v_{b_n} - 1/\zeta_n) e^{t/\zeta_n} + (v_{b_n} + 1/\zeta_n) e^{-t/\zeta_n}}{(v_{b_n} - 1/\zeta_n) e^{t/\zeta_n} + (v_{b_n} + 1/\zeta_n) e^{-t/\zeta_n}} \quad (104)$$

$$v_{b_n} = \frac{S_n + m_n g_n}{k_n} \quad (105)$$

$$\frac{\mu}{\zeta_n} = \frac{v_{b_n} - v_{n_i-1}}{v_{b_n} + v_{n_i-1}} \quad (106)$$

$$v_{i-1} = 0 \quad (107)$$

$$t_n = \frac{l_n}{S_n} \quad (108)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \frac{m_n}{k_n} \ln \frac{S_n + m_n g_n + k_n v_{n_i-1}^2}{S_n + m_n g_n + k_n v_n^2} \quad (109)$$

$$S_c = \frac{1}{2} \frac{m_k}{k_k} \ln \frac{m_k g_k + k_k v_k^2}{m_k g_k} \quad (110)$$

$$S_{TOT} = S_c + \sum_{n=1}^k S_n \quad (111)$$

Per un missile aria-aria o aria-terra,  $v_{i-1} = v_0$  che è la velocità dell'aereo.

Un'osservazione (da completare e scrivere meglio): le formule scritte qui sopra sono concettualmente, sotto certi aspetti, generalizzazioni (ovviamente) del moto del paracadutista, quindi si possono riscrivere nella forma della (6) e conseguenti.

### 3.7 Motore a reazione con tasso di variazione temporale della massa costante

qui il motore a reazione con efflusso lineare nel tempo, cioè con portata massica costante  $M(t) = M_0 - \lambda t$

### 3.8 Motore a reazione con spinta costante nel caso generale

qui Fredholm Volterra o sviluppi in serie per piccole quote rispetto al raggio della Terra

## 4 Problema di Kepler: soluzione generale

In questa sezione risolveremo, seppur in modo molto sintetico e, purtroppo, ancora eccessivamente tecnico, il problema di seguire nel tempo la posizione di un corpo lungo un'orbita classica di tipo kepleriano, cioè determinata dalla sola forza gravitazionale generata da un punto matematico o da un "primario" con simmetria sferica, vale a dire con massa distribuita in modo omogeneo ed isotropo in una sfera: nelle ipotesi assunte il risultato si applica al moto dei corpi di un sistema gravitazionale binario, sia nel caso in cui le due masse sono di grandezza confrontabile, sia nel caso di un corpo "secondario", vale a dire con massa molto minore del primario attorno a cui orbita: tra gli esempi applicativi di quest'ultima situazione citiamo i satelliti, ricordando *en passant* che satellite in latino vuol dire proprio guardia del corpo, nonché i missili, relativamente al tratto di "crociera", cioè dopo lo spegnimento del motore.

### 4.1 Posizione di un satellite ad un tempo generico su un'orbita nota

Per definire in modo completo la conica orbitale e quindi, tipicamente, l'ellisse, servono due parametri, quali i semiassi  $a$ ;  $b$  o, in maniera equivalente, l'eccentricità  $e$  definita come

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

e il semiasse maggiore  $a$ .

In alternativa si potrebbero utilizzare altre coppie di numeri, tra le quali  $p$ ;  $a$  oppure  $p$ ;  $e$  dove il semilatus rectum è la combinazione

$$p = a(1 - e^2)$$

che misura la semiampiezza della conica valutata perpendicolarmente dal fuoco.

La posizione in coordinate polari con origine nel fuoco è data dal raggio vettore  $r$  e dall'anomalia vera  $\theta$  secondo la relazione

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Sia noto l'istante di tempo del passaggio al perigeo  $t_0$ , più in generale, il tempo  $t_p$  del transito in un punto qualsiasi dell'orbita che prenderemo proprio come riferimento per scandire i tempi e le posizioni successive. Allora, indicando con  $\mu$  il parametro gravitazionale

$$\mu = GM_{\text{terra}} \quad (112)$$

dove  $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  è la costante di gravitazione universale,  $M_{\text{terra}} = 5.977 \times 10^{24} \text{ kg}$  la massa della Terra, e con  $n$  il cosiddetto moto medio

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (113)$$

si ottiene la posizione ad un tempo successivo  $t$  invertendo l'espressione

$$t - t_p = \frac{1}{n} \arcsin \left( \frac{p \sin \#}{1 + e \cos \#} \right) \quad (114)$$

che si ricava direttamente dall'integrazione dell'equazione differenziale legata alla conservazione del momento angolare.

In modo equivalente si può invertire

$$t - t_p = \frac{1}{n} \left( 2 \arctan \left( \frac{r}{1 + e} \tan \frac{\#}{2} \right) - \frac{\mu}{2} \right) \quad (115)$$

che si ricava con banali trasformazioni dalla (114).

Ovviamente il compito proposto può essere soddisfatto in modo analitico solo tramite rappresentazioni integrali o per serie dato che l'anomalia vera  $\#$  compare contemporaneamente sia come argomento indipendente che come argomento della funzione trascendente.

L'origine di questa difficoltà sta nel fatto che le equazioni differenziali del moto sono singolari.

Seguendo Kepler, introdurremo allora un cerchio ausiliario, di raggio pari al semiasse maggiore e concentrico con l'orbita; tiriamo dalla posizione  $(r; \#)$  del satellite sull'ellisse la verticale al semiasse maggiore fino ad incontrare il semicerchio ausiliario dalla stessa parte del semiellisse orbitale e individuiamo così un punto sul cerchio in corrispondenza della posizione del satellite sull'orbita. Al trascorrere del tempo  $t$  il grave si sposta lungo l'orbita così che, per il modo in cui è definito, si sposta anche il punto fittizio sul cerchio ausiliario, variando la sua posizione angolare  $E$ . Risulta che l'ampiezza  $E$  dell'angolo che localizza il punto ausiliario rispetto al centro del cerchio è determinata dalla relazione

$$E(t) - \sin E(t) = (t - t_p) n$$

Usando quindi la conoscenza della cosiddetta anomalia media

$$M(t) = (t - t_p) n \quad (116)$$

si deve, con la seguente equazione del tempo

$$E(t) - \sin E(t) = M(t) \quad (117)$$

determinare soltanto l'anomalia eccentrica  $E(t)$  cioè l'anomalia che definisce la posizione al tempo  $t$  del punto fittizio sul cerchio di Kepler. Una volta ottenuta  $E$ , si ricava finalmente la posizione del satellite in coordinate polari con origine nel centro di gravità, ossia nel centro del corpo primario al tempo  $t$  successivo all'istante  $t_p$  del passaggio al perigeo, con le formule

$$\begin{aligned} r(t) &= a[1 - e \cos E(t)] \\ \cos \#(t) &= \frac{1 - e \cos E(t)}{1 - e} \end{aligned} \quad (118)$$

dove si può sfruttare anche

$$\tan \frac{\#(t)}{2} = \frac{r}{1 - e} \tan \frac{E(t)}{2} \quad (119)$$

Se si vuole invece la posizione in coordinate cartesiane, sempre con origine nel fuoco, si dovrà usare

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \#(t) = a [\cos E(t) - e] \\ y(t) &= r(t) \sin \#(t) = a \sqrt{1 - e^2} \sin E(t) \end{aligned} \quad (120)$$

mentre nel centro dell'orbita

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos E(t) \\ y(t) &= r(t) \sin \#(t) = a \sqrt{1 - e^2} \sin E(t) \end{aligned} \quad (121)$$

Il calcolo dell'anomalia eccentrica tramite la (117) non è altro che una riscrittura del problema sancito dall'inversione delle (114), (115).

Infatti, note  $M$  ed  $e$ , la già citata equazione (117) non è risolvibile rispetto ad  $E$  o, almeno, non è risolvibile in termini finiti di funzioni elementari perchè l'incognita  $E$ , ancora una volta, compare sia come argomento della funzione trascendente che come argomento indipendente.

Tuttavia, riformulato nella maniera indicata, il problema offre ora delle rappresentazioni esplicite della soluzione.

Una espressione analitica è infatti la serie

$$E(t) = M(t) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} J_s(es) \sin[sM(t)] \quad (122)$$

dove i coefficienti di Bessel  $J_s(x)$  sono definiti, come si vedrà dallo sviluppo seguente, attraverso la rappresentazione integrale

$$J_s(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \cos(s' - x \sin') d' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} e^{i(s' - x \sin')} d'$$

che fornisce l'utilissima serie di Taylor

$$J_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+s} \quad (123)$$

A questo punto il problema di conoscere la posizione sull'orbita definita da  $a; e$  in un istante di tempo generico  $t$  è completamente risolto mediante serie infinite ed operazioni elementari.

#### DIMOSTRAZIONE

Riscrivendo l'equazione di Kepler (117) come

$$E(t) - M(t) = e \sin E(t)$$

vediamo che la quantità  $G \sim E \sim M$  è una funzione dispari e periodica, quindi può essere sviluppata alla Fourier mediante una serie di soli seni; d'altra parte, considerando nell'equazione (117) l'anomalia eccentrica come funzione dell'anomalia media, la funzione  $G(M) \sim E(M) \sim M$  si può sviluppare nella variabile  $M$ , pertanto scriveremo

$$\sin E(t) \sim 2 \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin[sM(t)] \quad (124)$$

con coefficienti determinati, per definizione, nella forma

$$b_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin E \sin(sM) dM$$

A questo punto integrando per parti, sostituendo dentro il differenziale e poi dentro l'argomento del coseno, si ottiene

$$\begin{aligned} b_s &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \sin E \cos(sM) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(sM) d(\sin E) \\ &= 0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(sM) dM + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(sM) dE = \\ &= 0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(sE - s \sin E) dE \end{aligned}$$

I numeri

$$J_s(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s' - s \sin') d' \quad (125)$$

sono detti coefficienti di Bessel; con essi possiamo scrivere

$$b_s = \frac{1}{s} J_s(s)$$

e quindi dalla (117) e (124) otteniamo l'importante risultato già anticipato

$$E(t) = M(t) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} J_s(s) \sin[sM(t)]$$

che è l'espressione dell'anomalia eccentrica mediante serie infinite di operazioni elementari sull'anomalia media e sull'eccentricità. Essa rappresenta un'ottima maniera per esprimere in modo rigoroso la soluzione analitica del problema.

A questo punto vogliamo ricavare soltanto un'altra, equivalente, rappresentazione esplicita dei coefficienti  $J_s$ ; a tale scopo osserviamo che

$$\begin{aligned}
 J_s(\nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s' - \nu \sin') d' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(s' - \nu \sin')} d' = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i s'} e^{-i \nu \sin'} d'
 \end{aligned}$$

L'ultima espressione ottenuta consente di interpretare i numeri  $J_s$  come i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica

$$F(\nu; z) = e^{i \nu \sin'} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\nu) e^{i s'}$$

Chiamando ora  $e^{i s'} = z$ , da cui  $2i \sin' = z - \frac{1}{z}$ , e ricordando l'espansione di Taylor dell'esponenziale, si vede che

$$\begin{aligned}
 F(\nu; z) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\nu) z^s = e^{(\nu/2)z} e^{-(\nu/2)z^{-1}} = \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu/2)^{\nu}}{\nu!} z^{\nu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\nu/2)^{\nu}}{\nu!} z^{-\nu} = \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu/2)^{\nu}}{\nu!} (\nu/2)^{\nu} z^{\nu}
 \end{aligned}$$

Dunque ponendo nell'ultima espressione  $\nu = s$ , trovo finalmente

$$\begin{aligned}
 F(\nu; z) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu/2)^{\nu}}{\nu!} (\nu/2)^{\nu} z^{\nu} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\nu) z^s \\
 J_s(\nu) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu/2)^{\nu}}{\nu!} (\nu/2)^{\nu} z^{\nu}
 \end{aligned}$$

Prima di passare oltre vogliamo fare alcune osservazioni.

Per piccoli valori dell'eccentricità, quali quelli della maggior parte dei corpi del sistema solare, sono sufficienti pochi termini; troncando quindi lo sviluppo (122) ai primi sei coefficienti di Bessel (123) ed usando per questi ultimi le espressioni approssimate all'ottavo ordine, otteniamo



$$\begin{aligned}
E(t) = & M(t) + \mu \left[ \frac{1}{8} \sin^3 M(t) + \frac{1}{192} \sin^5 M(t) + \frac{1}{9216} \sin^7 M(t) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sin^2 M(t) + \frac{1}{6} \sin^4 M(t) + \frac{1}{48} \sin^6 M(t) + \frac{1}{720} \sin^8 M(t) + \\
& + \frac{3}{8} \sin^3 M(t) + \frac{27}{128} \sin^5 M(t) + \frac{243}{5120} \sin^7 M(t) + \frac{1}{3} \sin^4 M(t) + \frac{4}{15} \sin^6 M(t) + \frac{4}{45} \sin^8 M(t) + \\
& \left. + \frac{125}{384} \sin^5 M(t) + \frac{3125}{9216} \sin^7 M(t) + \frac{27}{80} \sin^6 M(t) + \frac{243}{560} \sin^8 M(t) \right] \quad (126)
\end{aligned}$$

ossia anche riordinando i termini

$$\begin{aligned}
E(t) = & M(t) + \mu \sin M(t) + \frac{1}{2} \mu \sin^2 M(t) + \mu \frac{3}{8} \sin^3 M(t) + \frac{1}{8} \mu \sin^4 M(t) + \\
& + \mu \frac{1}{3} \sin^4 M(t) + \frac{1}{6} \mu \sin^4 M(t) + \\
& + \mu \frac{125}{384} \sin^5 M(t) + \frac{27}{128} \mu \sin^5 M(t) + \frac{1}{192} \mu \sin^5 M(t) + \\
& + \mu \frac{27}{80} \sin^6 M(t) + \frac{4}{15} \mu \sin^6 M(t) + \frac{1}{48} \mu \sin^6 M(t) \quad (127)
\end{aligned}$$

Osserviamo che le (126) (127) derivate attraverso lo sviluppo di Fourier non rappresentano altro che la riscrittura moderna in termini analitici dell'antica descrizione geometrica di Tolomeo in termini di epicicli cioè della maniera di descrivere il moto dei pianeti mediante la composizione (124) di moti circolari: per apprezzare meglio la grandezza degli antichi matematici greci ed alessandrini, culminata nella teoria tolemaica, ricordiamo che essi non disponevano di un sistema efficiente per trasformare la geometria in termini di numeri, nè, d'altra parte, avevano piena consapevolezza degli strumenti principali dell'analisi matematica, quali il calcolo differenziale ed integrale, ed inoltre riferirono il moto ad un sistema di riferimento non inerziale, per cui la descrizione doveva essere ulteriormente complicata e assai difficile da trattare; nondimeno, riuscirono a dare una descrizione molto esauriente e raffinata. Essa ancor oggi stupisce gli studiosi ed i tecnici moderni, non fosse altro per la precisione e la correttezza ottenute a dispetto delle notevoli difficoltà, soltanto accennate, che caratterizzano la formulazione antica.

## 4.2 Metodo di Newton

La risoluzione dell'equazione (117) può essere fatta anche con metodi iterativi che risultano spesso, dal punto di vista computazionale, addirittura più convenienti dello sviluppo à la Bessel visto prima. A tale scopo sarà utile implementare il metodo di Newton-Raphson, detto anche della tangente, che illustreremo qui di seguito.

Introducendo la funzione

$$f(E) = E - e \sin E - M$$

si stabilisce dapprima che essa esibisce uno ed un solo zero in corrispondenza di un valore noto dell'anomalia media  $M$  e dell'eccentricità  $e$ : si tratta allora di determinarlo considerando inizialmente un valore di prova  $E_k$  nell'intorno del valore  $E^*$  tale che

$$f(E^*) = 0$$

In un piano coordinato  $y; E$  la tangente alla curva  $f(E)$  nel punto di coordinate  $(E_k; f(E_k))$  ha equazione

$$y = mE + q$$

dove ovviamente

$$m = \left. \frac{df(E)}{dE} \right|_{E=E_k}$$

$$q = f(E_k) - mE_k$$

Approssimando dunque lo zero  $E^*$  della curva  $f(E)$  con il valore  $E_k + \frac{q}{m}$  per cui si annulla la tangente, si vede che quest'ultimo può essere raffinato iterativamente mediante il calcolo che segue

$$E^* \approx E_{k+1} = \frac{E_k f'(E_k) - f(E_k)}{f'(E_k)} \quad (128)$$

$$= E_k + \frac{f(E_k)}{f'(E_k)} \quad (129)$$

fino a che si arriva al di sotto dell'errore stabilito preventivamente sulla conoscenza di  $E^*$ ; dunque sfrutteremo

$$E_{k+1} = E_k + \frac{E_k - e \sin E_k - M}{1 - e \cos E_k} \approx E_k + \frac{M_k - M}{1 - e \cos E_k} \quad (130)$$

questo vuol dire che l'iterazione indicata nella (130) deve essere portata avanti fino a che la differenza  $M_k - M$  non scende al di sotto di un valore ritenuto accettabilmente piccolo, ossia fino a che si scende al di sotto dell'incertezza  $\Delta t \approx t_k - t$  relativa all'istante di tempo in cui si vuol conoscere la posizione del satellite, essendo  $t_k = \frac{1}{n} M_k - t_p$ .

Per i valori dell'eccentricità tipici della maggior parte dei corpi del sistema solare, il valore di prova iniziale dell'anomalia eccentrica può essere scelto pari

all'anomalia media:  $E_0 = M$  mentre per grandi eccentricità, quale è il caso di molte comete e dei satelliti per telecomunicazione sovietici Molniya (che vuol dire Folgore, fulmine), si può partire da  $E_0 = \frac{1}{4}$ .

Leggiamo la formula espressa dalla relazione (130) : essa ci dice che partendo dai valori noti di  $M$  ed  $e$  e dalla prima approssimazione  $E_0$  dell'anomalia eccentrica, dobbiamo calcolare le approssimazioni successive

$$E_1 = E_0 + \frac{e \sin E_0 - M}{1 - e \cos E_0}$$

$$E_2 = E_1 + \frac{e \sin E_1 - M}{1 - e \cos E_1} \quad \text{et cetera}$$

andando avanti nella maniera indicata, cioè ricorsivamente, fino a che si raggiunge il grado di approssimazione desiderato. Senza entrare nei dettagli, si può dimostrare, applicando il teorema delle contrazioni, che il procedimento illustrato ammette una ed una sola soluzione e quella espressa in maniera iterativa converge alla soluzione cercata cioè al "valore vero"  $E^*$  dell'anomalia eccentrica che cercavamo.

Ricordiamo che il metodo della secante, analogo a questo della tangente visto qui e sul quale, quindi, non ci dilunghiamo, risulta a volte ancora più conveniente per quanto riguarda l'onerosità dei calcoli.

## 5 Manovre orbitali

Per correggere l'orbita di un veicolo spaziale occorre imprimere ad esso cambiamenti di velocità in punti opportuni della traiettoria sfruttando principalmente le forze interne fornite dai motori a reazione. Nel seguito discuteremo l'esecuzione di manovre orbitali mediante variazioni di velocità, che indicheremo con l'espressione sintetica "ΔV", sia rispetto a cambiamenti di orientazione, cioè di disposizione nello spazio del piano orbitale, sia rispetto a puri cambiamenti di forma e dimensione della traiettoria; cominciamo da questi ultimi illustrando brevemente i tipici cambiamenti d'orbita planari.

### 5.1 Aggiustamento dell'altezza del perigeo e dell'apogeo

Consideriamo l'espressione dell'energia meccanica per unità di massa che compete ad una navicella spaziale in movimento per effetto della sola interazione gravitazionale classica

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (131)$$

dove  $v$  indica il modulo della velocità,  $r$  la distanza dal centro di forza,  $a$  il semiasse maggiore e  $\mu$  il cosiddetto parametro gravitazionale cui abbiamo già accennato in precedenza: facciamo alcune valutazioni numeriche che ci saranno utili.

Per la Terra risulta

$$\begin{aligned}
 \mu &= GM_{\text{terra}} = 398601;19 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2} = \\
 &= 398601;19 \text{ t } 10^9 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} = \\
 &= 398601;19 \text{ t } 10^9 \text{ m J} = \text{kg} = \\
 &= 398601;19 \text{ t } 10^9 \text{ m W s} = \text{kg} = \\
 &= 110722;55 \text{ t } 10^6 \text{ m W h} = \text{kg} = \\
 &= 110722;55 \text{ t } 10^3 \text{ m kW h} = \text{kg} = \\
 &= 110722;55 \text{ km kW h} = \text{kg} = \tag{132}
 \end{aligned}$$

Per fare un esempio, l'energia complessiva di un satellite in orbita circolare a 620 km di quota, ossia a 7000 km dal centro della Terra, ha un'energia specifica che in valore assoluto ammonta a circa 7908;75 kW h = kg . Una sonda di 1000 kg avrebbe pertanto un'energia totale di 7908;75 MW h : questo vuol dire che le forze gravitazionali esplicano un lavoro di quasi 8 GW h , questa è l'energia che compete ad un tale moto ed è quella che serve per mettere in orbita una tale navicella alla detta quota.

Dalla relazione (131) otteniamo  $v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$  . Valutiamo la variazione del semiasse maggiore per effetto di un incremento di velocità molto rapido, quasi istantaneo, cioè ad  $r$  fissato: basterà differenziare entrambi i membri ricavando l'espressione

$$da = 2 \frac{a^2}{r} v dv$$

Essa esprime la variazione infinitesima del semiasse maggiore  $a$  per effetto della variazione infinitesima  $dv$  sull'intensità di velocità  $v$  lungo la direzione dell'atto di moto riguardo al caso in cui la distanza  $r$  del veicolo spaziale dal fuoco di gravità resti immutata. Poichè l'asse maggiore misura  $2a$  , allora esso varierà di  $2da$  . Fin qui abbiamo eseguito uno "sparo" in un punto qualsiasi di un'orbita kepleriana cioè determinata dalla sola accelerazione gravitazionale impressa al veicolo da un primario con simmetria sferica, senza attrito atmosferico e senza altri corpi celesti nelle vicinanze: l'unica accortezza era di dirigere il getto nel piano orbitale e nella direzione istantanea della velocità.

Applicando queste considerazioni ad uno sparo negli apsi, vediamo immediatamente, da considerazioni elementari sulla geometria orbitale e dal fatto che abbiamo richiesto di fissare la distanza  $r$  dal centro di gravità a seguito dello sparo, che eseguendo un  $\Phi v$  al perigeo otterremo semplicemente di cambiare l'altezza dell'apogeo e viceversa, uno sparo all'apogeo, nel piano orbitale e lungo la direzione della velocità nell'istante di transito nell'apside, determina soltanto un cambiamento nell'altezza del perigeo.

A seconda dell'accelerazione impressa cioè del verso di  $\Phi v$  rispetto al verso della  $v$  avremo una vera e propria accelerazione, cioè una variazione positiva di velocità oppure una variazione negativa, ossia un frenamento.

Qui va fatta una precisazione doverosa: dalla meccanica elementare sappiamo che al movimento di un corpo sono associate delle quantità che rimangono costanti lungo le traiettorie seguite dal corpo in virtù delle forze agenti. Questo vuol dire che la dinamica stessa è governata dall'esistenza, cioè dalla necessità, di costruire dei numeri costanti; uno di essi è appunto l'energia. Si dimostra che la dinamica è resa possibile da tali costanti del moto, anche dette integrali primi, e la conoscenza esplicita del percorso seguito può avvenire solo attraverso tali costanti. L'energia associata ad una forza, cioè la capacità di compiere lavoro, determina il movimento in maniera tale che moti ad energie maggiori si raggiungono accelerando e viceversa, ad orbite con energia minore si giunge mediante dei frenamenti.

Un frenamento vuol dire dunque una diminuzione di energia, mentre una spinta vuol dire un impulso verso moti ad energia maggiore. L'energia è uno scalare, cioè è definito da un solo numero, non ha né un verso né una direzione, ed è definito a meno di una costante arbitraria che fissa lo zero della scala; quindi è del tutto arbitrario ed equivalente definire l'energia ponendo lo zero all'infinito oppure no: le relazioni con i cambiamenti di velocità saranno i medesimi, solo che a seconda di come è definito il segno dell'energia, potranno esserci delle accortezze riguardo all'aumento effettivo della velocità. Ciò avviene proprio nel caso dell'energia del moto planetario.

Avviene infatti un fenomeno controintuitivo e solo apparentemente incongruente: sparando  $\mathcal{C} \mathbf{V}$  in un'apside nel verso della velocità  $\mathbf{V}$  e quindi rivolgendo il getto propulso per la reazione nel verso contrario, aumenta l'energia, si alza l'altro apside ma diminuisce la velocità puntuale, cioè il suo valore assoluto (aumenta anche il momento angolare).

Nelle medesime condizioni, sparando invece  $\mathcal{C} \mathbf{V}$  nel verso contrario alla velocità, si "frena" perché diminuisce l'energia, si abbassa di conseguenza l'altezza dell'altro apside ma aumenta la velocità di percorrenza, cioè il suo valore tangenziale. Tutto questo avviene perché per orbite legate governate da energia kepleriana (131) l'energia è negativa e va coll'inverso del semiasse maggiore: è tale quindi che orbite basse, cioè complessivamente meno energetiche, sono percorse più rapidamente delle orbite alte.

Le relazioni viste prima consentono di specializzare il cambiamento di velocità ad una variazione piccola ma finita applicata al perigeo o all'apogeo: indicando con  $v_{p;a}$  la velocità istantanea al perigeo o all'apogeo avremo le seguenti espressioni per le rispettive variazioni di altezza dell'apogeo

$$\mathcal{C} h_a \approx 4 \frac{a^2}{r} v_p \mathcal{C} v_p \quad (133)$$

o del perigeo

$$\mathcal{C} h_p \approx 4 \frac{a^2}{r} v_a \mathcal{C} v_a \quad (134)$$

Tutto questo nell'ipotesi di sparo istantaneo, cioè di durata molto breve rispetto alla dinamica orbitale.

## 5.2 Trasferimento di Hohmann

Spesso il posizionamento di un satellite su un'orbita alta viene realizzato collocando dapprima in modo diretto la sonda spaziale su un'orbita bassa di parcheggio per mezzo del lanciatore stesso e poi realizzando il trasferimento sull'orbita alta di destinazione finale tramite un'orbita intermedia ellittica tangente ad entrambe grazie alla spinta dei motori della navicella; ciò è molto conveniente soprattutto quando le due orbite iniziale e finale sono circolari e coplanari; la manovra orbitale descritta costituisce il cosiddetto trasferimento di Hohmann, vediamo in dettaglio.

Supponiamo di voler viaggiare da una piccola orbita di raggio  $r_1$  ad una più grande di raggio  $r_2$  lungo un'ellisse di ascensione alla Hohmann.

Indichiamo con  $v_1$  la velocità nel punto, che per convenzione chiameremo 1, del cerchio di parcheggio in cui facciamo lo sparo per l'inserimento nell'ellisse di trasferimento; poichè il semiasse maggiore  $a_t$  è tale che

$$2a_t = r_1 + r_2 \quad (135)$$

allora l'energia specifica dell'ellisse di trasferimento vale

$$E_t = -\frac{1}{2a_t} = -\frac{1}{r_1 + r_2} \quad (136)$$

Poichè infine il punto 1 è comune sia all'orbita circolare di parcheggio sia all'orbita ellittica di trasferimento, potremo scrivere, relativamente all'ellisse, l'equazione dell'energia del moto nel suddetto punto di tangenza:

$$v_1^2 = \frac{\mu}{r_1} \left( \frac{r_1}{a_t} + 1 \right) = \frac{\mu}{r_1} \left( \frac{r_1}{r_1 + r_2} + 1 \right) \quad (137)$$

$$= \frac{\mu}{r_1} \frac{r_1 + r_1 + r_2}{r_1 + r_2} = \frac{\mu}{r_1} \frac{2r_1 + r_2}{r_1 + r_2} \quad (138)$$

Osserviamo che lungo l'orbita circolare di partenza la velocità è uniforme di modulo costante pari a  $v_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$  come si ricava dall'equazione (\*); dunque per mandare il nostro satellite dalla piccola orbita circolare all'ellisse di trasferimento è necessario incrementare il modulo della velocità da  $v_{c1}$  al valore  $v_1$ :

$$\Delta v_1 = v_1 - v_{c1} \quad (139)$$

Analogamente si calcola il cambiamento di velocità richiesto per trasferire nel punto 2 la navicella dall'ellisse all'orbita circolare di destinazione. Ora la velocità circolare uniforme finale vale

$$v_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \quad (140)$$

mentre quella del punto 2 dell'ellisse risulta

$$v_2 = \frac{\rho_2}{2} \frac{r_1}{r_2} + E_t = \quad (141)$$

$$= \frac{\rho_2}{2} \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{r_1 + r_2} \quad (142)$$

In maniera del tutto analoga viene realizzato il trasferimento inverso da un'orbita circolare più grande ad una circolare più piccola mediante un'ellisse di discesa à la Hohmann: sfruttando i medesimi principi occorrerà semplicemente invertire le direzioni dei getti calibrandole per le opportune velocità.

Il tempo di volo di un trasferimento di Hohmann è ovviamente pari alla metà del periodo dell'orbita ellittica

$$T = 2\frac{1}{4} \frac{S}{a_t^3} \quad (143)$$

dunque, nell'ipotesi che lo sparo duri per un intervallo di tempo molto più breve delle dinamiche delle orbite coinvolte, cioè sia così breve da poterlo considerare istantaneo, avremo

$$\zeta_{\text{volo}} = \frac{1}{4} \frac{S}{a_t^3} \quad (144)$$

### 5.3 Trasferimenti generali coplanari fra orbite circolari

finire

## 6 Encheiridion

Queste poche paginette sono parte di appunti e rielaborazioni nate ad uso strettamente personale e senza alcuna pretesa pubblica, quindi le carenze di esposizione sono da imputare esclusivamente alla loro natura privata e al fatto che esse si sono accresciute in modo irregolare nel corso del tempo. Ho voluto aggiungere alla poche pagine sul moto del razzo la parte sul paracadute per l'applicazione al recupero dei missiletti sportivi.

Qui, senza alcun intento di completezza, lasciamo poche note esplicative per rendere le pagine precedenti un pò più leggibili.

Per qualsiasi commento o suggerimento, scrivete a: [fmvaleriani@inwind.it](mailto:fmvaleriani@inwind.it)

E' inutile che qui io scopiazzai qualsiasi buon testo di matematica o di fisica elementare perchè ce ne sono tanti in circolazione e non sarebbe quindi per niente originale: piuttosto ditemi voi quanto devo tagliare perchè troppo elementare e quanto devo precisare perchè poco chiaro. Il riferimento di base è l'analisi matematica insegnata in un buon corso del primo anno di una facoltà

scientifico: in alternativa credo che potrebbero essere molto utili i cenni di calcolo differenziale e integrale che si insegna(va)no in un normale Liceo Scientifico o Istituto Tecnico.

Diciamo che sapete che cosa è una funzione: una legge che associa, secondo una precisa relazione, ad un numero che varia in maniera "indipendente" un altro numero.

E' importante considerare il tasso di variazione di una funzione, cioè la velocità di variazione di una variabile dipendente rispetto alla variazione della variabile indipendente.

Indichiamo un numero variabile in maniera indipendente da altri numeri con  $x$  e con  $f$  un numero che, secondo una certa legge assegnata, cioè supposta nota, varia in base al valore assunto per volta da  $x$ ; scriveremo  $f(x)$  per indicare questa legge di dipendenza. Allora la velocità di variazione di  $f$  rispetto ad  $x$  si scrive

$$\frac{df}{dx}$$

vabbè, questo è solo un simbolo e non dice niente, ma non posso rifare tutta la teoria, c'è gente molto migliore di me, comunque ricordate solo i concetti!

Essa è una quantità locale nel senso che...

Essa è sostanzialmente un rapporto fra differenze... e si chiama anche derivata prima.

Se conosco l'espressione della derivata (e il valore della funzione incognita in un solo punto), posso, con un processo inverso, che sarà qualcosa come una somma integrale... ricostruire la funzione  $f(x)$  cioè posso risalire alla quantità che mi interessa...

$$f(x) = \int \frac{df}{dx} dx$$

Dalla definizione di derivata (che qui non vi ho dato in modo formale) seguono alcune proprietà generali e alcune regole di calcolo da utilizzare nel calcolo differenziale.

Diamo un breve cenno alle funzioni trascendenti incontrate in queste pagine. Trascendenti elementari

La funzione esponenziale  $f(x) = e^x$  è definita per ogni valore della variabile indipendente  $x$  e la sua rappresentazione analitica esatta

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots$$

consente il calcolo numerico esplicito; analogamente si dimostra che

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k}{k!} x^k = 1 + ix + \frac{1}{1 \cdot 2} (ix)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (ix)^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (ix)^4 + \dots$$



Da queste espressioni si definiscono le funzioni iperboliche

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots \\ \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 - \dots \end{aligned}$$

in analogia con le funzioni circolari, per le quali risulta invece

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots \end{aligned}$$

L'espressione della tangente trigonometrica vale ovviamente per  $|\frac{x}{2}| < x < \frac{3}{2}$  dove  $\frac{3}{2}$  è il numero che esprime il rapporto della circonferenza al proprio diametro ed è definito dalla serie

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \dots$$

La funzione inversa dell'esponenziale, cioè il logaritmo, si calcola per ogni  $x$  compreso nell'intervallo  $(-1; 1]$  mediante la seguente espressione analitica

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots$$

che con un'adeguata trasformazione di coordinate consente il calcolo per ogni valore ammissibile. Ad esempio è banale che

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k = -x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \dots$$

e quindi che per  $0 < x < 2$

$$\ln x = \ln(1-x) + \ln(1+x) = -\frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 - \frac{1}{4} (x-1)^4 + O(x-1)^5$$

Se dunque si volesse calcolare, con un voluto grado di approssimazione, il logaritmo di un qualsiasi numero  $x$  compreso tra  $0$  e  $+1$ , si potrebbe procedere con il seguente algoritmo: fino a che il numero  $x$  in questione assume un valore tra  $0$  e  $2$  si usa una delle espressioni analitiche riportate qui sopra, troncandola al termine opportuno che garantisce l'approssimazione desiderata; per valori di  $x > 2$  si genera un numero  $\gg$  compreso tra  $0$  e  $2$  nella seguente maniera

$$\gg = \frac{2x}{x+1}$$

dopo di che è banale calcolare

$$\ln x = \ln \frac{\gg}{2 - \gg} = \ln \gg - \ln(2 - \gg)$$

infatti risulta banalmente che  $8x \in [0; +1) \Rightarrow \gg \in \left[\frac{2x}{x+1}; 2\right] \in [0; 2)$ . Questo algoritmo è sostanzialmente corretto e consente quindi, a meno di una eleganza che si potrebbe ottenere raffinando il procedimento esposto, e per la quale rimandiamo ai testi specializzati di calcolo numerico, di ottenere il logaritmo di un qualsiasi numero.

Infine si dimostra che la funzione arcotangente per ogni valore ammissibile, cioè compreso fra  $-1$  e  $+1$ , è data esattamente da

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

Tramite essa calcolata per  $x = 1$  si ottiene una delle prime espressioni rigorose per  $\frac{1}{4}$ , come quella mostrata prima; tuttavia data l'estrema lentezza della convergenza della serie, si preferisce sfruttare espressioni più velocemente convergenti come

$$\frac{1}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

### Trascendenti superiori

Fin qui abbiamo incontrato soltanto le funzioni di Bessel del primo tipo di ordine intero, di solito indicate con il simbolo  $J_n$ , e le cui espressioni analitiche esatte, sinteticamente ricordate già nel testo, sono per le prime di esse, scritte

fino all'ottavo ordine, le seguenti

$$\begin{aligned}
 J_0(x) & \cdot 1 \text{ i } \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 \text{ i } \frac{1}{2304}x^6 + \frac{1}{147456}x^8 \text{ i } \dots \\
 J_1(x) & \cdot \frac{1}{2}x \text{ i } \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{192}x^4 \text{ i } \frac{1}{9216}x^6 + \frac{1}{737280}x^8 \text{ i } \dots \\
 J_2(x) & \cdot \frac{1}{8}x^2 \text{ i } \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{384}x^4 \text{ i } \frac{1}{23040}x^6 + \frac{1}{2211840}x^8 \text{ i } \dots \\
 J_3(x) & \cdot \frac{1}{48}x^3 \text{ i } \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{640}x^4 \text{ i } \frac{1}{46080}x^6 + \frac{1}{5160960}x^8 \text{ i } \dots \\
 J_4(x) & \cdot \frac{1}{384}x^4 \text{ i } \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{960}x^4 \text{ i } \frac{1}{80640}x^6 + \frac{1}{10321920}x^8 \text{ i } \dots \\
 J_5(x) & \cdot \frac{1}{3840}x^5 \text{ i } \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{1344}x^4 \text{ i } \frac{1}{129024}x^6 + \frac{1}{18579456}x^8 \text{ i } \dots \\
 J_6(x) & \cdot \frac{1}{46080}x^6 \text{ i } \frac{1}{28}x^2 + \frac{1}{1792}x^4 \text{ i } \frac{1}{193536}x^6 + \frac{1}{30965760}x^8 \text{ i } \dots \\
 J_7(x) & \cdot \frac{1}{645120}x^7 \text{ i } \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{2304}x^4 \text{ i } \frac{1}{276480}x^6 + \frac{1}{48660480}x^8 \text{ i } \dots
 \end{aligned}$$

Il razzo relativistico, indagato profondamente a partire dagli anni '50, non è stato più incluso in questi appunti perchè non può avere, per i limiti tecnologici attuali, alcuna applicazione pratica: pertanto esso ha solo un interesse teorico come esercizietto per studenti dei primi anni universitari. Chiunque sia interessato, può scrivermi per farsi mandare il documento, per quel poco che conosco.