UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2002

GARA di SECONDO LIVELLO BIENNIO

20 febbraio 2002

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 15 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 10 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 11 al numero 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) L'ultimo problema richiede invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tale problema verrà valutato con un punteggio **da 0 a 12**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **2 ore e 45 minuti** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:____________________ COGNOME:____________________

Indirizzo:____________________ Città:____________________

SCUOLA:____________________ CLASSE:________ Città:____________________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–10)		$\times 5 =$	
numero delle risposte esatte (11–14)		$\times 8 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.15			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
AGIPPETROLI
Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Nella seguente moltiplicazione

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & a & b & \times \\ & & c & 8 & = \\ \hline 5 & d & e & f & \end{array}$$

ad ogni lettera corrisponde una cifra. Sapendo che nella moltiplicazione compaiono tutte le cifre da 1 a 9 una ed una sola volta, qual è il valore di e?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 9.

2. Se $y = 2x$ e $z = 2y$, a cosa è uguale $x + y + z$?

(A) $5x$ **(B)** $4y$ **(C)** $3z$ **(D)** $\frac{7}{2}y$ **(E)** $\frac{7}{3}z$.

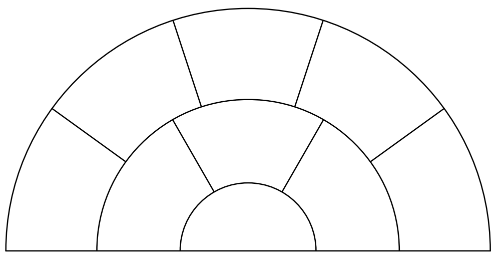
3. In una mappa di una certa regione ci sono dieci città ai vertici di un decagono regolare, e i dieci lati del decagono rappresentano altrettante strade. Nella regione ci sono dei lavori, per cui ogni strada è aperta con una probabilità $\frac{1}{2}$ indipendentemente dalle altre.
Qual è la probabilità che da ogni città si possa raggiungere ogni altra città?

(A) fra lo 0,2% e lo 0,5% **(B)** fra lo 0,5% e l'1% **(C)** fra l'1% e il 2% **(D)** fra il 2% e il 5%
(E) fra il 5% e il 10%.

4. È noto che i Marziani maschi dicono sempre la verità, mentre le Marziane mentono sempre; al contrario i Venusiani maschi mentono e le Venusiane dicono sempre il vero. Atterra un'astronave piena di Marziani e Venusiani; all'ufficio immigrazione due degli occupanti, Ark e Bark, fanno le seguenti dichiarazioni:
Ark: "Bark è di Venere".
Bark: "Ark è di Marte".
Ark: "Bark è maschio".
Bark: "Ark è femmina".
Sulla base di tali dichiarazioni l'impiegato può determinare:

(A) Pianeta e sesso di Ark, ma non di Bark
(B) pianeta e sesso di Bark, ma non di Ark
(C) solo il pianeta di entrambi (ma non il sesso)
(D) solo il sesso di entrambi (ma non il pianeta)
(E) pianeta e sesso di entrambi.

5. Nella figura a fianco si hanno tre semicerchi concentrici. Le aree di tutti i settori sono uguali all'area del semicerchio centrale. Qual è il rapporto tra il raggio del semicerchio più grande e quello del semicerchio intermedio?



(A) $\frac{4}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{5}{3}$ **(D)** 2
(E) il rapporto dipende dal raggio del cerchio più piccolo.

6. Siano $a < b < c$ interi positivi tali che $a^2 + b^2 + c^2$ ha lo stesso numero di cifre decimali di $a + b + c$. Qual è il massimo valore che può assumere c?

(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 18 **(D)** 30 **(E)** 31.

7. Sia ABC un triangolo isoscele tale che $B\widehat{A}C = 120°$ e $AB = AC = 1$. Quanto misura il raggio del cerchio circoscritto?

   (A) 2 **(B)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(D)** 1 **(E)** nessuna delle precedenti.

8. Andrea, viaggiando su un tram, incrocia Mafalda che sta camminando sulla stessa strada in direzione opposta. Dopo 10 secondi scende dal tram e la rincorre. Sapendo che la velocità con cui Andrea cammina è doppia di quella di Mafalda e un quinto di quella del tram, quanti secondi impiega a raggiungere l'amica da quando è sceso?

   (A) 60 **(B)** 70 **(C)** 90 **(D)** 110 **(E)** 120.

9. Sia $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polinomio di secondo grado con coefficienti reali (cioè a, b, c sono numeri reali e $a \neq 0$). Se $P(2000) = 2000$ e $P(2001) = 2001$, allora $P(2002)$ non può essere uguale a:

   (A) 2000 **(B)** 2001 **(C)** 2002 **(D)** 2003 **(E)** 2004 .

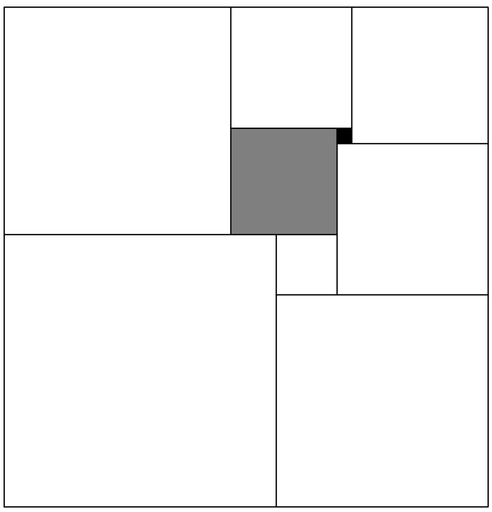
10. Un atleta ha appena affrontato una gara di triathlon. Questa competizione si divide in tre fasi: la prima è una gara di nuoto, la seconda di ciclismo e la terza di corsa. Sapendo che la sua velocità media nei tre tratti è stata rispettivamente di 3 Km/h, 30 Km/h e 17 Km/h, che la lunghezza totale del tracciato è 30 Km e che il tempo che ha impiegato a concludere la gara è stato di un'ora e 40 minuti, determinare per quanto tempo è andato in bicicletta.

    (A) 66' 20" **(B)** 60' **(C)** 45' **(D)** 33' 20" **(E)** non si può determinare.

Problemi a risposta numerica – 8 punti

11. Un puzzle da 1000 pezzi può essere montato incastrando i pezzi uno dopo l'altro, in modo da inserire ciascun nuovo pezzo nella porzione di puzzle già composta, oppure costruendo diversi gruppi di pezzi e poi unendo questi tra di loro. Ogni unione (di due singoli pezzi, o di due gruppi, o di un pezzo a un gruppo) conta una mossa. Qual è il numero minimo di mosse necessarie per completare il puzzle?

12. Il rettangolo in figura è diviso in 9 quadrati (la figura non è in scala). Le lunghezze dei lati dei due quadrati ombreggiati sono rispettivamente 7 cm e 1 cm. Trovare il perimetro del rettangolo.



13. Gli interi da 1 a 9 sono scritti nelle nove caselle di una scacchiera 3×3, ogni intero in una casella diversa, in modo tale che ogni coppia di numeri consecutivi sia scritta in due caselle adiacenti (cioè aventi un lato in comune). Quanti sono i valori possibili del numero posto sulla casella centrale?

14. Quante sono le terne di interi (a, b, c) tutti maggiori di 1 tali che $a^{(b^c)} < 2002$?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Determinare il numero dei parallelepipedi retti con base quadrata che hanno tutti gli spigoli di lunghezza intera e volume uguale a 270 000.

SOLUZIONE

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2002

GARA di SECONDO LIVELLO BIENNIO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

La prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quattordici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B	D	C	E	B	A	D	D	C	E	999	130	5	7

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quattordici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, l'ultimo problema richiede una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questo esercizio, diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. L'esercizio sarà valutato con un numero intero da 0 a 12.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 12 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quella da noi proposta.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Nelle linee della dimostrazione proposta, attribuire:

1. 2 punti per la scrittura esplicita della fattorizzazione di 270 000;
2. 4 punti per la considerazione che un divisore di 270 000 deve essere della forma $3^a 2^b 5^c$ con $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 4$, $0 \leq c \leq 4$;
3. 1 punto per la considerazione che $x^2 = 3^{2a} 2^{2b} 5^{2c}$;
4. 2 punti per l'esame del numero di casi in cui si ha (i) $2a + d = 4$, (ii) $2b + e = 3$, (iii) $2c + f = 3$ (questi due punti possono essere suddivisi in 1 punto per il caso (i) e 1 punto per i due casi (ii) e (iii);
5. 3 punti per la considerazione che il numero dei casi totali è uguale al prodotto dei numeri di casi in cui si ha (i), (ii) e (iii).

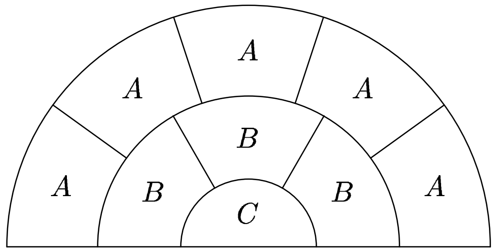
1. La risposta è **(B)**. Notiamo innanzitutto che c deve essere 1, in quanto la cifra 2 è già presente nella moltiplicazione ed inoltre, se c fosse maggiore di 2, la prima cifra del risultato dovrebbe essere più grande di 5. A questo punto notiamo che a deve essere uguale a 9 poiché non può essere 8 (già presente nella moltiplicazione), mentre se a fosse minore di 8 il risultato sarebbe minore o uguale a $279 \times 18 = 5022$, ma d non può essere uguale a 0.
   Osserviamo ora che b può assumere solo i valori 3,4,6,7. D'altra parte si ha che $293 \times 18 = 5274$, $294 \times 18 = 5292$, $296 \times 18 = 5328$, tutte soluzioni non accettabili perché contengono cifre ripetute. Pertanto l'unica possibilità è $b = 7$ per cui la moltiplicazione diventa $297 \times 18 = 5346$ e quindi $e = 4$.

2. La risposta è **(D)**. Si ha ovviamente $z = 4x$ e $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$, da cui $x + y + z = 7x = \frac{7}{2}y = \frac{7}{4}z$.

3. La risposta è **(C)**. Se tutte le strade sono aperte, evidentemente è possibile spostarsi liberamente da una città all'altra. Se una sola strada è chiusa, le nove strade aperte costituiscono una linea spezzata continua attraverso cui è ancora possibile spostarsi da una città all'altra. Se ci sono almeno due strade chiuse, si presentano due casi: o ci sono due strade chiuse consecutive, e quindi la città che sta in mezzo a queste due strade è isolata, oppure ci sono due strade chiuse non consecutive, che tagliano le dieci città in due parti isolate l'una dall'altra. Quindi, perché da ogni città si possa raggiungere qualsiasi altra, è necessario e sufficiente che al massimo una strada sia chiusa. La probabilità che tutte le strade siano aperte è $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$. Ci sono poi dieci modi possibili che una sola strada sia chiusa, poichè l'unica strada chiusa può essere una qualsiasi delle 10 strade. Pertanto la probabilità che una sola strada sia chiusa è uguale a $10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} = 10 \cdot (\frac{1}{2})^{10}$. Pertanto la probabilità cercata è $11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{11}{1024} \approx 0{,}01074$, ed è compresa fra l'1% e il 2%.

4. La risposta è **(E)**. Se Ark dice il vero, allora Bark è un venusiano maschio, quindi mente, ma allora Ark deve essere un venusiano maschio, assurdo. Dunque Ark mente, quindi Bark è una femmina marziana, che mente, e dunque Ark è effettivamente un venusiano maschio (che mente). Quindi tutto è determinato.

5. La risposta è **(B)**. Chiamiamo r_A, r_B e r_C i raggi dei tre semicerchi, presi in ordine decrescente di grandezza. Allora l'area di ogni zona A è data da $\frac{\pi}{10}(r_A^2 - r_B^2)$, l'area di ogni zona B da $\frac{\pi}{6}(r_B^2 - r_C^2)$ e quella di C da $\frac{\pi}{2}r_C^2$. Pertanto dovremo avere



$$\begin{aligned} r_B^2 - r_C^2 &= 3r_C^2 \\ 3r_A^2 - 3r_B^2 &= 5r_B^2 - 5r_C^2 \end{aligned}$$

   da cui si ricava $r_B = 2r_C$ e $r_A = 3r_C$.

6. La risposta è **(A)**. La condizione che $a+b+c$ abbia lo stesso numero di cifre di $a^2+b^2+c^2$ implica che
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} < 10.$$
   Pertanto si deve avere che
$$a^2 - 10a + b^2 - 10b + c^2 - 10c < 0,$$
   il che è equivalente ad affermare che
$$(a-5)^2 + (b-5)^2 + (c-5)^2 < 75.$$
   In particolare $(c-5)^2 < 75$, da cui si ricava $c < 14$. Osserviamo ora che se $9 < c < 14$ allora $a^2+b^2+c^2$ ha almeno 3 cifre, mentre $a+b+c \leq 3c$ ne ha 2. Quindi c è al più 9 ed è facile verificare che la terna $(1, 2, 9)$ soddisfa le condizioni richieste.

7. La risposta è **(D)**. Chiamiamo O il centro del cerchio circoscritto e consideriamo il triangolo AOC. Esso è isoscele in O e d'altra parte $O\widehat{A}C = \frac{1}{2}B\widehat{A}C = 60°$; dunque AOC è equilatero.

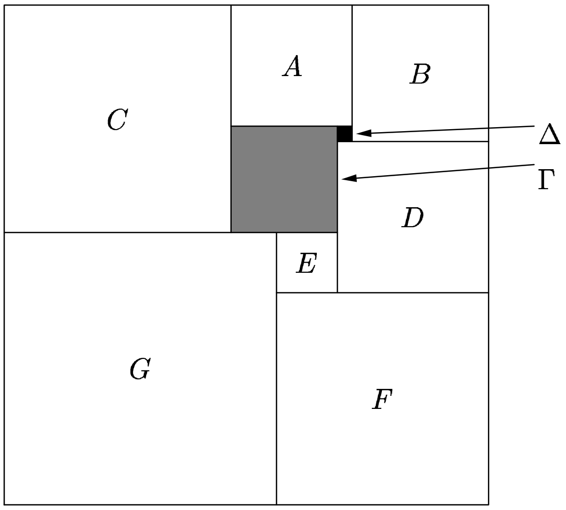
8. La risposta è **(D)**. Se la velocità di Mafalda è v metri/secondo, sappiamo che quella di Andrea è $2v$ metri/secondo e quella del tram $10v$ metri/secondo. Quando Andrea scende dal tram la sua distanza da Mafalda è dunque $10v$ metri + $10 \times 10v$ metri=$110v$ metri. Poiché la sua velocità è doppia rispetto a quella di Mafalda, egli, rincorrendola, le si avvicinerà ad una velocità pari a v metri/secondo; dunque impiegherà 110 secondi.

9. La risposta è **(C)**. Per semplicità, poniamo $Q(X) = P(X+2000) - 2000$: notiamo che $Q(X)$ è sempre un polinomio dello stesso grado di $P(X)$. Sia $Q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. Le condizioni date diventano $Q(0) = 0$ e $Q(1) = 1$, cioè $\gamma = 0$ e $\alpha + \beta = 1$. La condizione $P(2002) = 2002$ diventa $Q(2) = 2$, cioè $4\alpha + 2\beta = 2$, che, insieme alle precedenti, dà $\alpha = 0$, $\beta = 1$; ne segue che $Q(X)$, e quindi anche $P(X)$, deve essere un polinomio di primo grado.
   Per gli altri valori si trovano invece facilmente i seguenti esempi:
$$Q(X) = -X^2 + 2X,\ \frac{-X^2+3X}{2},\ \frac{X^2+X}{2},\ X^2\,.$$

10. La risposta è **(E)**. Un modo per rendersi conto di ciò consiste nel mostrare due diverse suddivisioni del tracciato in tre parti per cui siano soddisfatte le condizioni del problema. Ad esempio: l'atleta potrebbe aver nuotato per $\frac{7}{27}$ di ora, corso per un'ora e corso in bicicletta per $\frac{11}{27}$ di ora. In tal caso avrebbe gareggiato per $\left(\frac{7}{27} + 1 + \frac{11}{27}\right)$ ore $= \left(1 + \frac{2}{3}\right)$ ore $= 100$ minuti ed avrebbe percorso una distanza pari a
$$\left(3\frac{7}{27} + 17 + 30\frac{11}{27}\right)\text{Km} = 30\,\text{Km}.$$
   Oppure potrebbe aver nuotato per mezz'ora, corso per mezz'ora e corso in bicicletta per 40 minuti (che sono $\frac{2}{3}$ di ora). Anche in tal caso il tempo della gara sarebbe stato di un'ora e quaranta minuti ed il tragitto lungo
$$3\frac{1}{2} + 17\frac{1}{2} + 30\frac{2}{3} = 30\,\text{Km}.$$

11. La risposta è 999. Dimostriamo per induzione che per costruire un nucleo di n pezzi sono necessarie $n-1$ mosse, comunque si proceda. L'affermazione è chiaramente vera per un puzzle costituito da un solo pezzo. Supponiamo che questa affermazione sia vera per tutti i nuclei con meno di n pezzi. L'ultima mossa da compiere per costruire un nucleo di n pezzi sarà l'unione di due nuclei di m e $n-m$ pezzi. Per ipotesi induttiva, per fare questi due nuclei sono state necessarie rispettivamente $m-1$ e $n-m-1$ mosse. In totale le mosse sono dunque:
$$(m-1) + (n-m-1) + 1 = n-1.$$
   Quindi per costruire tutto il puzzle occorrono in ogni caso 999 mosse.

12. Il perimetro del rettangolo grande è 130 cm. Chiamiamo Γ, Δ, A, B, C D, E, F, G i quadrati indicati in figura, l_Γ, l_Δ, l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F, l_G le lunghezze dei rispettivi lati e l_1, l_2 le lunghezze dei lati del rettangolo grande. Allora si vede facilmente che
$$\begin{array}{ll}
l_A = l_\Gamma + l_\Delta = 8 & l_D = l_B + l_\Delta = 9 + 1 = 10 \\
l_B = l_A + l_\Delta = 8 + 1 = 9 & l_E = l_D + l_\Delta - l_\Gamma = 10 + 1 - 7 = 4 \\
l_C = l_A + l_\Gamma = 15 & l_F = l_D + l_E = 10 + 4 = 14 \\
l_1 = l_A + l_B + l_C = 32 & l_G = l_F + l_E = 14 + 8 = 18 \\
 & l_2 = l_C + l_G = 15 + 18 = 33.
\end{array}$$
   Quindi il perimetro del rettangolo grande è $2 \cdot (32 + 33) = 130$.



13. La risposta è 5. Perchè la condizione data si possa realizzare, è necessario che si possa fare un percorso dalla casella con il numero 1 alla casella con il numero 9 muovendo successivamente da una casella ad una a lei adiacente. Coloriamo la scacchiera nel modo usuale, in modo tale che le caselle agli angoli e quella centrale siano nere e le altre siano bianche. Muovendo da una casella ad una a lei adiacente si passa da una casella nera ad una bianca, o viceversa. Ne segue che, se l'1 fosse in una casella bianca, allora il 2 dovrebbe essere in una nera, il 3 in una bianca, e così via. Quindi tutti i numeri dispari da 1 a 9, che sono 5, dovrebbero essere in caselle bianche, mentre tutti i numeri pari, che sono 4, dovrebbero essere in caselle nere: ma questo è impossibile, dato che ci sono 5 caselle nere e 4 bianche. Viceversa, è facile costruire dei percorsi a spirale o a serpentina in modo che uno qualunque dei numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9 compaia nella casella centrale.

14. La risposta esatta è 7
Distinguiamo 2 casi:
   - se $a = 2$ si deve avere $b^c < 11$ perché $2^{11} = 2048 > 2002$, quindi $b < 4$ e se $b = 2$ allora c può essere 2 o 3, mentre se $b = 3$ allora $c = 2$: si ottengono così le soluzioni $(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 2)$;
   - se $a > 2$ si deve avere $b^c < 7$ perché $a^7 \geq 3^7 = 2187 > 2002$. Pertanto l'unica possibilità è avere $b = 2$ e $c = 2$. Siccome $6^4 = 1286 < 2002$ mentre $7^4 = 2401 > 2002$, i valori ammissibili sono $a = 3, 4, 5, 6$ che forniscono le soluzioni $(3, 2, 2), (4, 2, 2), (5, 2, 2), (6, 2, 2)$ per un totale di 7 soluzioni.

15. Siano x il lato della base e y l'altezza di un parallelepipedo che soddisfa le condizioni date. Allora x e y sono interi positivi e
$$x^2 y = 270\,000 = 3^3 \cdot 2^4 \cdot 5^4\,.$$
Per la fattorizzazione unica degli interi, si ha $x = 3^a 2^b 5^c$, $y = 3^d 2^e 5^f$, dove gli esponenti soddisfano le seguenti condizioni:
$$\begin{aligned}
2a + d = 3, &\quad 0 \leq a, d \leq 3, \quad \text{da cui } a = 0, d = 3 \text{ oppure } a = 1, d = 1\\
2b + e = 4, &\quad 0 \leq b, e \leq 4, \quad \text{da cui } b = 0, e = 4 \text{ oppure } b = 1, e = 2 \text{ oppure } b = 2, e = 0\\
2c + f = 4, &\quad 0 \leq c, f \leq 4, \quad \text{da cui } c = 0, f = 4 \text{ oppure } c = 1, f = 2 \text{ oppure } c = 2, f = 0.
\end{aligned}$$
Dunque i soli casi possibili sono:
$$\begin{aligned}
(a, d) &= (0, 3), (1, 1),\\
(b, e) &= (0, 4), (1, 2), (2, 0),\\
(c, f) &= (0, 4), (1, 2), (2, 0).
\end{aligned}$$
Combinando in tutti i modi possibili le due possibilità per (a, d), le tre possibilità per (b, e) e le tre possibilità per (c, f) si ottengono $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ parallelepipedi.

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2002

GARA di SECONDO LIVELLO TRIENNIO

20 febbraio 2002

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 10 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 11 al numero 15 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) Gli ultimi due problemi richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di questi problemi verrà valutato con un punteggio **da 0 a 12**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:____________________COGNOME:__________________________

Indirizzo:________________________________Città:__________________

SCUOLA:_________________________CLASSE:_____ Città:______________

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–10)		$\times 5 =$	
numero delle risposte esatte (11–15)		$\times 8 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
AGIPPETROLI
Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Nel quartiere di S. Maria ci sono 9897 televisori. Solo tre famiglie del quartiere non possiedono televisori, mentre il 4% ne ha due, il 2,5% ne ha 3 e lo 0,5% ne ha addirittura 8. Tutte le altre famiglie possiedono un solo televisore. Quante famiglie abitano nel quartiere di S.Maria?

   (A) 9900 **(B)** 9252 **(C)** 9000 **(D)** 8800 **(E)** 8285.

2. Un sottoinsieme A dei numeri naturali compresi fra 1 e 100 è tale che la somma di due suoi elementi qualsiasi è divisibile per 6. Quanti elementi può avere, al massimo, il sottoinsieme A?

   (A) 11 **(B)** 16 **(C)** 17 **(D)** 25 **(E)** 33.

3. È noto che i Marziani maschi dicono sempre la verità, mentre le Marziane mentono sempre; al contrario i Venusiani maschi mentono e le Venusiane dicono sempre il vero. Atterra un'astronave piena di Marziani e Venusiani; all'ufficio immigrazione due degli occupanti, Ark e Bark, fanno le seguenti dichiarazioni:
   Ark: "Bark è di Venere".
   Bark: "Ark è di Marte".
   Ark: "Bark è maschio".
   Bark: "Ark è femmina".
   Sulla base di tali dichiarazioni l'impiegato può determinare:

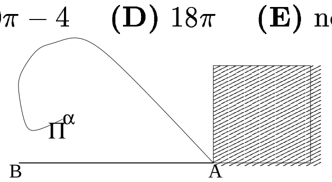
   (A) Pianeta e sesso di Ark, ma non di Bark
   (B) pianeta e sesso di Bark, ma non di Ark
   (C) solo il pianeta di entrambi (ma non il sesso)
   (D) solo il sesso di entrambi (ma non il pianeta)
   (E) pianeta e sesso di entrambi.

4. Sia $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polinomio a coefficienti interi (cioè, i numeri $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sono interi). Se $P(2000) = 2000$ e $P(2001) = 2001$, quanti fra i numeri $2000, 2001, 2002, 2003, 2004$ possono essere uguali a $P(2002)$?

   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5 .

5. Una capra (indicata in figura con Π^α) è legata a un punto A con una corda lunga 6 metri come mostrato nella figura (vista dall'alto). Il segmento AB rappresenta una staccionata lunga 4 metri oltre la quale la capra non può saltare. Il quadrato rappresenta un edificio di lato 2 metri all'interno del quale la capra non può entrare (e sul quale non può salire). Determinare la più grande area (in m^2) che la capra può brucare.

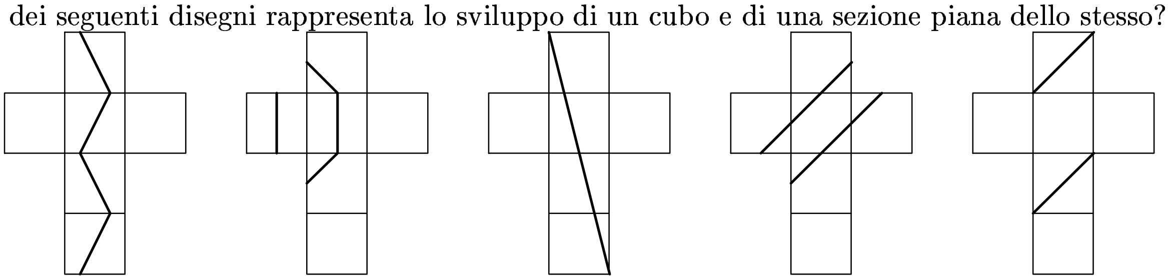
   (A) 16π **(B)** $16\pi + 4$ **(C)** $20\pi - 4$ **(D)** 18π **(E)** non si può determinare.



6. Determinare qual è il massimo comun divisore tra tutti i numeri che si possono scrivere come somma di 2002 dispari consecutivi tutti positivi e minori di 10000 (due numeri dispari si dicono consecutivi se differiscono di 2).

   (A) 2 **(B)** 4 **(C)** 2002 **(D)** 4004 **(E)** 8008.

7. Quale dei seguenti disegni rappresenta lo sviluppo di un cubo e di una sezione piana dello stesso?



(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

8. In un torneo di pallacanestro 8 squadre sono divise in due gruppi di 4 squadre ciascuno. Al termine degli incontri preliminari, si disputano le semifinali, in cui la prima classificata del primo gruppo incontrerà la seconda classificata del secondo gruppo e la prima classificata del secondo gruppo incontrerà la seconda classificata del primo gruppo. Se le squadre del primo gruppo sono A, B, C, D e quelle del secondo gruppo sono E, F, G, H, qual è la probabilità che gli incontri di semifinale siano A contro E e B contro G ? (Si suppone che le tutte possibili graduatorie di ciascun girone siano equiprobabili).

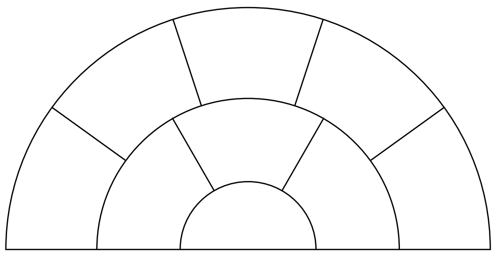
(A) $\frac{1}{256}$ **(B)** $\frac{1}{144}$ **(C)** $\frac{1}{128}$ **(D)** $\frac{1}{72}$ **(E)** nessuna delle precedenti.

9. Una gara di sci è divisa in due manches; un atleta si è piazzato al 3° posto nella prima ed al 5° nella seconda. Sapendo che la classifica finale è stilata sulla base della somma dei tempi ottenuti nelle singole manches, che ci sono 70 concorrenti e supponendo che non ci siano stati ex–aequo, dire quali posizioni può occupare l'atleta nella classifica finale.

(A) L'atleta è necessariamente quarto
(B) l'atleta può essersi piazzato in un posto qualunque tra terzo e quinto
(C) l'atleta può essersi piazzato in un posto qualunque tra secondo e sesto
(D) l'atleta può essersi piazzato in un posto qualunque tra primo e settimo
(E) l'atleta può essersi piazzato in un posto qualunque.

10. Nella figura a fianco si hanno tre semicerchi concentrici. Le aree di tutti i settori sono uguali all'area del semicerchio centrale. Qual è il rapporto tra il raggio del semicerchio più grande e quello del semicerchio intermedio?

(A) $\frac{4}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{5}{3}$ **(D)** 2
(E) il rapporto dipende dal raggio del cerchio più piccolo.



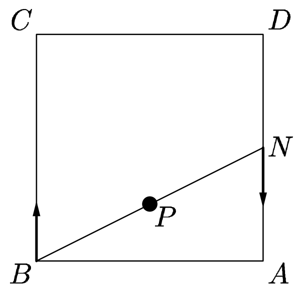
Problemi a risposta numerica – 8 punti

11. Un puzzle da 1000 pezzi può essere montato incastrando i pezzi uno dopo l'altro, in modo da inserire ciascun nuovo pezzo nella porzione di puzzle già composta, oppure costruendo diversi gruppi di pezzi e poi unendo questi tra di loro. Ogni unione (di due singoli pezzi, o di due gruppi, o di un pezzo a un gruppo) conta una mossa. Qual è il numero minimo di mosse necessarie per completare il puzzle?

12. Siano $a < b < c$ interi positivi tali che $a^2 + b^2 + c^2$ ha lo stesso numero di cifre di $a + b + c$. Qual è il massimo valore che può assumere c?

13. Qual è il minimo valore dell'espressione $x^2 - 8xy + 19y^2 - 6y + 14$ al variare di x e y fra i numeri reali?

14. Michela e Nicola stanno correndo lungo il perimetro di un parco quadrato $ABCD$ di diagonale 6 km. Essi corrono in senso orario alla stessa velocità. Il loro cane Pallino corre all'interno del parco in modo da stare sempre a metà strada tra Nicola e Michela. Inizialmente Michela è nel vertice B mentre Nicola è nel punto medio del lato AD. Quanti chilometri ha percorso Pallino quando Nicola ha fatto un giro del parco?



15. Gli interi da 1 a 9 sono scritti nelle nove caselle di una scacchiera 3×3, ogni intero in una casella diversa, in modo tale che ogni coppia di numeri consecutivi sia scritta in due caselle adiacenti (cioè aventi un lato in comune). Quanti sono i valori possibili del numero posto sulla casella centrale?

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia dato un triangolo ABC. Si indichino con M ed N i punti medi rispettivamente dei lati AC e BC. Siano inoltre S e T rispettivamente punti sui lati AC e BC tali che:

$$AS = \frac{1}{3}AC \qquad\qquad BT = \frac{1}{3}BC.$$

Dimostrare che le bisettrici degli angoli $A\widehat{S}T$ e $B\widehat{T}S$ si incontrano su un punto P del lato AB se e solo se il quadrilatero $AMNB$ è circoscrivibile ad una circonferenza.

SOLUZIONE

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Determinare tutte le terne di interi positivi (x, y, z) che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} 45xy^2 = 8z^3 \\ xyz < 1000 \ . \end{cases}$$

SOLUZIONE

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2002

GARA di SECONDO LIVELLO TRIENNIO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	C	E	C	A	D	B	D	D	B	999	9	11	6	5

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 12.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 12 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 16:
Prima implicazione, totale 6 punti:
vedere che $P\widehat{S}T = S\widehat{P}A$ o che $P\widehat{T}S = T\widehat{P}B$ equivale a 2 punti;
dimostrare inoltre che i triangoli ASP e BTP sono isosceli equivale a 1 punto;
trovare che $AM + BT = AB + MN$ equivale a 2 punti;
dedurre da ciò la circoscrivibilità equivale a 1 punto.

Seconda implicazione totale 6 punti:
Dedurre dalla circoscrivibilità che $AM + BT = AB + MN$ equivale a 1 punto;
trovare che $AS + BT = AB$ equivale a 1 punto;
vedere che $P_1\widehat{S}T = S\widehat{P_1}A$ o che $P_2\widehat{T}S = T\widehat{P_2}B$ equivale a 2 punti;
dimostrare inoltre che i triangoli ASP_1 e BTP_1 sono isosceli equivale a 1 punto;
Dedurre che $P_1 = P_2$ equivale a 1 punto.

Ad esempio, nel caso dell'esercizio 17, seguendo la linea della prima soluzione proposta:
l'osservazione che z è divisibile per 15 e la corrispondente semplificazione vale 2 punti;
l'osservazione successiva che anche xy deve essere divisibile per 15 (con o senza la divisione in casi secondo la parità di x e y) vale 2 punti;

l'osservazione che xy è pari, se seguita dalle corrette deduzioni e posizioni, vale 2 punti;
la trattazione dei tre casi x dispari, y dispari, x e y pari (purché completa) vale 2 punti ciascuno.
A prescindere dalla linea seguita:

– la sola indicazione della soluzione vale 1 punto;
– la dimostrazione che z è necessariamente 15 vale 3 punti.

1. La risposta è **(D)**. Se regaliamo un televisore alle famiglie che non ce l'hanno, la percentuale di famiglie che hanno solo un televisore diventa il 93%, e il numero totale di televisori 9900. Detto dunque N il numero di famiglie del quartiere abbiamo la seguente relazione:

$$N\frac{93}{100}+2N\frac{4}{100}+3N\frac{2,5}{100}+8N\frac{0,5}{100}=9900.$$

Da cui

$$N\left(\frac{93}{100}+\frac{8}{100}+\frac{7,5}{100}+\frac{4}{100}\right)=N\left(\frac{186+16+15+8}{200}\right)=N\frac{225}{200}=9900,$$

quindi $N=8800$.

2. La risposta è **(C)**. I numeri debbono essere o tutti pari o tutti dispari, poiché le somme a 2 a 2 sono tutte pari.
Analogamente, i numeri debbono essere tutti divisibili per 3, perché se in A ci fosse un numero non divisibile per 3 (con resto r, diciamo), allora ce ne potrebbe essere solo un altro (con resto $3-r$) e quindi $|A|=2$, troppo poco!
Ora i multipli pari di 3, cioè i multipli di 6 tra 1 e 100 sono 16, mentre i multipli dispari di 3 sono 17, quindi $A=\{3(2k+1)|k=0,1,\ldots,16\}$.

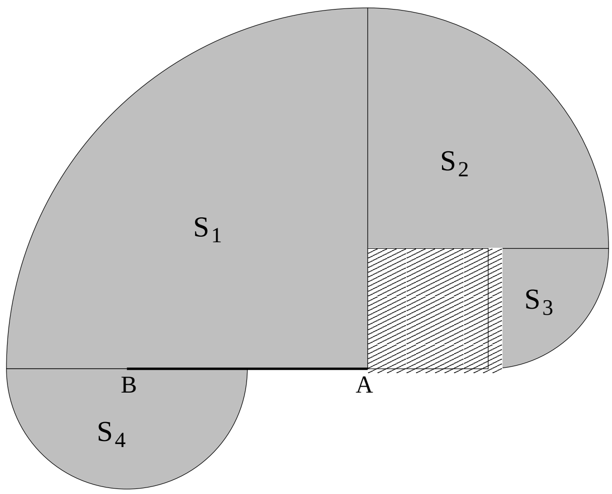
3. La risposta è **(E)**. Se Ark dice il vero, allora Bark è un venusiano maschio, quindi mente, ma allora Ark deve essere un venusiano maschio, assurdo. Dunque Ark mente, quindi Bark è una femmina marziana, che mente, e dunque Ark è effettivamente un venusiano maschio (che mente). Quindi tutto è determinato.

4. La risposta è **(C)**. Osserviamo innanzitutto che i numeri 2001 e 2003 non sono possibili, in quanto sono numeri dispari. Infatti, poiché $P(2000)=a_n2000^n+a_{n-1}2000^{n-1}+\cdots+a_12000+a_0=2000$ è un numero pari, a_0 deve essere un numero pari, e di conseguenza, calcolando il valore del polinomio in un qualsiasi numero pari $2k$, si ottiene che $P(2k)=a_n(2k)^n+a_{n-1}(2k)^{n-1}+\cdots+a_1(2k)+a_0$ deve essere pari.

Viceversa, è facile costruire esempi in cui gli altri valori si possono ottenere:

$$\begin{aligned}\text{se } P(X)=2001-(X-2001)^2,&\quad P(2002)=2000;\\ \text{se } P(X)=X,&\quad P(2002)=2002;\\ \text{se } P(X)=(X-2000)^2+2000,&\quad P(2002)=2004.\end{aligned}$$

5. La risposta è **(A)**. Infatti semplici osservazioni permettono di vedere che l'area che può essere brucata dalla capra è quella indicata nella seguente figura:



L'area S_1 è un quarto di quella di un cerchio di raggio 6 e cioè: $\frac{1}{4}(6^2)\pi=9\pi$.

L'area S_2 è un quarto di quella di un cerchio di raggio 4 e cioè: $\frac{1}{4}(4^2)\pi=4\pi$.

L'area S_3 è un quarto di quella di un cerchio di raggio 2 e cioè: $\frac{1}{4}(2^2)\pi = \pi$.
L'area S_4 è metà di quella di un cerchio di raggio 2 e cioè: $\frac{1}{2}(2^2)\pi = 2\pi$.
L'area cercata è pertanto: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 16\pi$.

6. La risposta è **(D)**. Chiamiamo $S(n)$ la somma di 2002 dispari consecutivi a partire da n.

$$S(1) = 1 + 3 + \ldots + 4003 = (1 + 4003) + (3 + 4001) + \ldots + (2001 + 2003) = 4004 \cdot 1001.$$

Notiamo che $S(n + 2)$ e $S(n)$ hanno in comune 2001 addendi e che la loro differenza è pertanto uguale a

$$((n + 2) + 4002) - n = 4004.$$

Il massimo comun divisore tra gli $S(n)$ è quindi 4004.

SECONDA SOLUZIONE.
La somma dei primi n numeri dispari da 1 a $2n-1$ è n^2, quindi la somma di 2002 dispari consecutivi a partire da $2n+1$ è $(n+2002)^2 - n^2 = 2002(2n+2002) = 4004(n+1001)$ quindi sono tutti multipli di 4004, e due consecutivi hanno MCD 4004 perché $\text{MCD}(k, k+1) = 1$.

7. La risposta è **(B)**. Si osservi innanzitutto che il disegno non può essere né **(C)** né **(E)**, poiché gli sviluppi delle linee non si chiudono quando si rimonta il cubo.
Non puó essere nemmeno **(D)**, poiché la sezione non può contenere due linee su una stessa faccia del cubo. Non può infine essere nemmeno **(A)**, poiché i 4 punti in cui la linea interseca gli spigoli del cubo non sono complanari (è facile ad esempio vedere che le due rette che uniscono ognuno di tali punti con quello che giace sullo spigolo opposto sono sghembe).
È d'altra parte immediato osservare, rimontando il cubo, che **(B)** corrisponde ad una sezione con un piano parallelo ad uno spigolo, che divide in due le due facce adiacenti allo spigolo.

8. La risposta è **(D)**. La probabilità cercata si può calcolare come segue: la squadra A raggiunge la semifinale se si classifica prima o seconda nel suo girone, e questo avviene con probabilità $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Nel caso che A raggiunga la semifinale, solo un'altra squadra fra B, C, D raggiungerà la semifinale, e quindi la probabilità che questa squadra sia B è $\frac{1}{3}$. Assegnati i posti di A e B, c'è una sola posizione di classifica in cui si può trovare E per incontrare A, dunque E si troverà in questa posizione con probabilità $\frac{1}{4}$. Supposto che E si trovi in questa posizione, per F c'è una sola posizione fra le 3 restanti in cui può incontrare B, e dunque B la raggiungerà con probabilità $\frac{1}{3}$.
La probabilità cercata è dunque $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$.

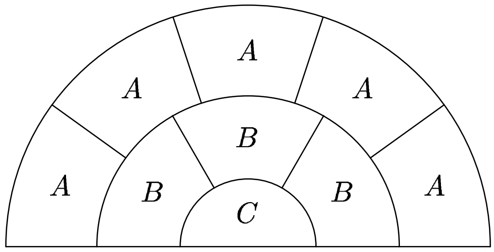
SECONDA SOLUZIONE
Poichè le coppie di squadre possibili all'interno di un insieme di quattro squadre sono $\binom{4}{2} = 6$, la probabilità che le due semifinaliste del primo girone siano A e B è uguale a $\frac{1}{6}$. Similmente, la probabilità che le due semifinaliste del secondo girone siano E ed F è uguale a $\frac{1}{6}$. Se questo avviene, la probabilità che A incontri E (e dunque necessariamente B incontri F) è $\frac{1}{2}$.
La probabilità cercata è dunque $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{72}$.

9. La risposta è **(D)**. Infatti, poiché solo in 2 hanno fatto un tempo migliore nella prima manche e solo in quattro hanno fatto meglio di lui nella seconda manche, l'atleta in questione ha ottenuto in entrambe le manches tempi migliori dei restanti 63 atleti, quindi non si è potuto classificare più che settimo. Per verificare che tutte le posizioni, dal primo al settimo posto, sono ottenibili, indichiamo con A, B, C, D, E ed F sei nomi di sciatori e con X il nostro atleta. Un esempio di come X possa arrivare settimo è dato da queste due manches:

	A	B	C	D	E	F	X
1^o*manche*	1 : 29	1 : 30	1 : 59	1 : 58	1 : 57	1 : 56	1 : 55
2^o*manche*	1 : 58	1 : 59	1 : 27	1 : 26	1 : 25	1 : 24	1 : 57
totale	3 : 27	3 : 29	3 : 36	3 : 34	3 : 32	3 : 30	3 : 52

Se invece X avesse fatto $1:31$ nella prima e $1:28$ nella seconda manche, con un totale di $2:59$ sarebbe arrivato primo, pur rimanendo terzo e quinto nelle due manches. Si può allora verificare senza troppa difficoltà che, lasciando invariati i tempi di A, B, C, D, E, F, e modificando soltanto quelli di X, quest'ultimo possa arrivare in una qualunque posizione tra la prima e la settima.

10. La risposta è **(B)**. Chiamiamo r_A, r_B e r_C i raggi dei tre semicerchi, presi in ordine decrescente di grandezza. Allora l'area di ogni zona A è data da $\frac{\pi}{10}(r_A^2 - r_B^2)$, l'area di ogni zona B da $\frac{\pi}{6}(r_B^2 - r_C^2)$ e quella di C da $\frac{\pi}{2}r_C^2$. Pertanto dovremo avere



$$\begin{aligned} r_B^2 - r_C^2 &= 3r_C^2 \\ 3r_A^2 - 3r_B^2 &= 5r_B^2 - 5r_C^2 \end{aligned}$$

da cui si ricava $r_B = 2r_C$ e $r_A = 3r_C$.

11. La risposta è 999. Dimostriamo per induzione che per costruire un nucleo di n pezzi sono necessarie $n-1$ mosse, comunque si proceda. L'affermazione è chiaramente vera per un puzzle costituito da un solo pezzo. Supponiamo che questa affermazione sia vera per tutti i nuclei con meno di n pezzi. L'ultima mossa da compiere per costruire un nucleo di n pezzi sarà l'unione di due nuclei di m e $n-m$ pezzi. Per ipotesi induttiva, per fare questi due nuclei sono state necessarie rispettivamente $m-1$ e $n-m-1$ mosse. In totale le mosse sono dunque:

$$(m-1) + (n-m-1) + 1 = n-1.$$

Quindi per costruire tutto il puzzle occorrono in ogni caso 999 mosse.

12. La risposta è 9. La condizione che $a+b+c$ abbia lo stesso numero di cifre di $a^2+b^2+c^2$ implica che
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} < 10.$$
Pertanto si deve avere che
$$a^2 - 10a + b^2 - 10b + c^2 - 10c < 0,$$
il che è equivalente ad affermare che
$$(a-5)^2 + (b-5)^2 + (c-5)^2 < 75.$$
In particolare $(c-5)^2 < 75$, da cui si ricava $c < 14$. Osserviamo ora che se $9 < c < 14$ allora $a^2+b^2+c^2$ ha almeno 3 cifre, mentre $a+b+c \leq 3c$ ne ha 2. Quindi c è al più 9 ed è facile verificare che la terna $(1, 2, 9)$ soddisfa le condizioni richieste.

13. La risposta è 11. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & x^2 - 8xy + 19y^2 - 6y + 14 = \\ = \; & x^2 - 8xy + 16y^2 + 3y^2 - 6y + 3 + 11 = \\ = \; & (x-4y)^2 + 3(y-1)^2 + 11 \geq 11. \end{aligned}$$

Il valore 11 si ottiene per $y = 1$, $x = 4$.

14. La risposta è 6. Si scelga un riferimento cartesiano ponendo il vertice B all'origine e gli assi x e y rispettivamente lungo i segmenti AB e BC.
Si consideri il tratto che Nicola percorre da T, punto medio di AD, al vertice A (vedi figura 1). Poiché Nicola e Michela corrono con la medesima velocità, quando Nicola si trova in N e Michela si trova in M, risulta $TN = BM$. Per simmetria centrale rispetto al punto P, di coordinate $\left(\frac{\sqrt{18}}{2}, \frac{\sqrt{18}}{4}\right)$, si ha che il cane Pallino durante questo tratto resta fermo nel punto P.
Si consideri ora il tratto che Nicola percorre da A al punto medio di AB (vedi figura 2). Sempre

per il fatto che Nicola e Michela corrono con la stessa velocità si ha che $BN + BM = 3\frac{\sqrt{18}}{2}$, dette quindi x e y le coordinate del punto medio di MN si ottiene la relazione:

$$x + y = \frac{3}{4}\sqrt{18}.$$

Tale relazione implica che durante questo tratto Pallino si muove su una retta, in particolare percorre il segmento PQ dove Q è il punto di coordinate $\left(\frac{\sqrt{18}}{4}, \frac{\sqrt{18}}{2}\right)$ in cui si trova Pallino quando Michela è in C e Nicola è nel punto medio di AB.
Ora la situazione è identica a quella iniziale ruotata di un angolo di 90°. Pallino percorre quindi (vedi figura 3) il quadrato $PQRS$ fermandosi per un certo tempo ai vertici. Tale quadrato ha lato pari a:

$$\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{18}}{4} - \frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{18}}{2} - \frac{\sqrt{18}}{4}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Pertanto, quando Nicola ha fatto il giro del parco, Pallino ha percorso $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ chilometri.

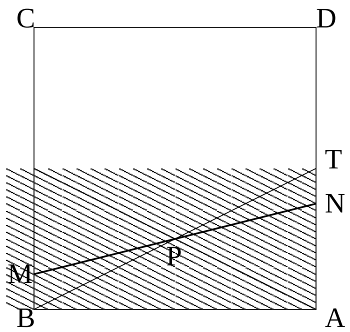


Fig. 1

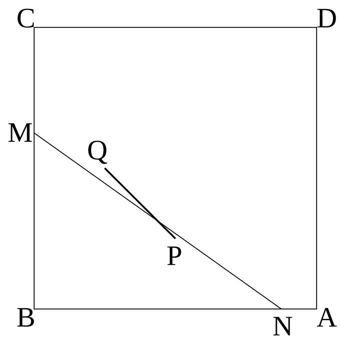


Fig. 2

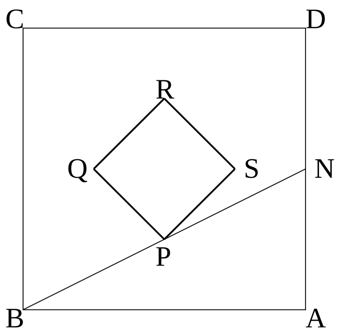
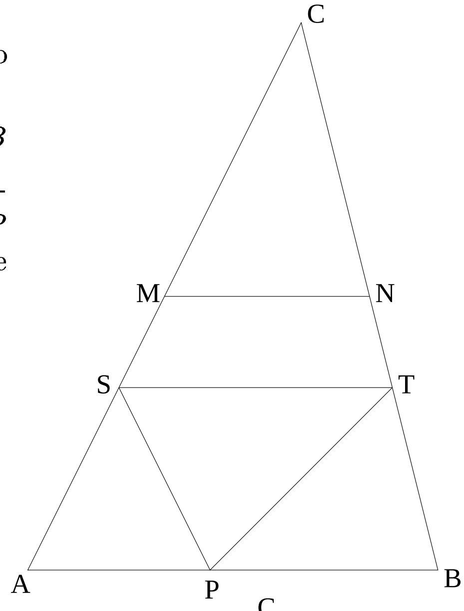


Fig. 3

15. La risposta è 5. Perchè la condizione data si possa realizzare, è necessario che si possa fare un percorso dalla casella con il numero 1 alla casella con il numero 9 muovendo successivamente da una casella ad una a lei adiacente. Coloriamo la scacchiera nel modo usuale, in modo tale che le caselle agli angoli e quella centrale siano nere e le altre siano bianche. Muovendo da una casella ad una a lei adiacente si passa da una casella nera ad una bianca, o viceversa. Ne segue che, se l'1 fosse in una casella bianca, allora il 2 dovrebbe essere in una nera, il 3 in una bianca, e così via. Quindi tutti i numeri dispari da 1 a 9, che sono 5, dovrebbero essere in caselle bianche, mentre tutti i numeri pari, che sono 4, dovrebbero essere in caselle nere: ma questo è impossibile, dato che ci sono 5 caselle nere e 4 bianche. Viceversa, è facile costruire dei percorsi a spirale o a serpentina in modo che uno qualunque dei numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9 compaia nella casella centrale.

16. Si supponga che le bisettrici degli angoli $A\widehat{S}T$ e $B\widehat{T}S$ si incontrino in un punto P del lato AB.
Dal momento che $\frac{AS}{AC} = \frac{BT}{BC}$, per il teorema di Talete, ST e AB sono segmenti paralleli, pertanto gli angoli $P\widehat{S}T$ e $S\widehat{P}A$ sono uguali. Ora, poiché per ipotesi $A\widehat{S}P = S\widehat{P}A$, si ha che il triangolo ASP è isoscele e quindi $AS = AP$. In modo analogo si ricava che anche i segmenti BT e BP hanno lunghezze uguali. Ricordando che:

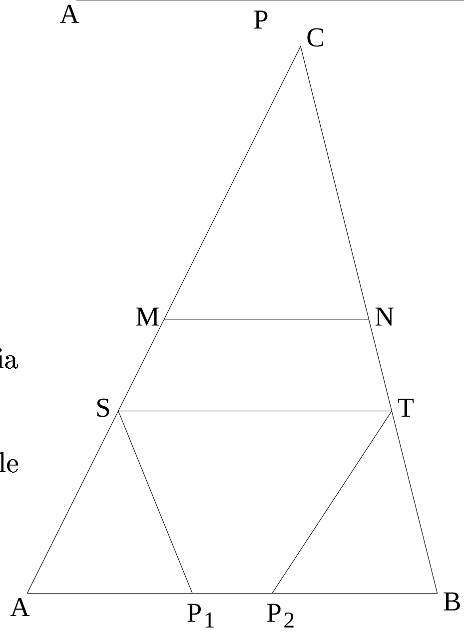


$$AS = \frac{1}{3}AC \qquad BT = \frac{1}{3}BC,$$

si ottiene:

$$AB = AS + BT = \frac{1}{3}(AC + BC).$$

Dalla relazione scritta sopra si ricava inoltre:



$$MA + NB = \frac{1}{2}(AC + BC) = \frac{3}{2}AB.$$

D'altra parte $MN = \frac{AB}{2}$ e quindi risulta:

$$MN + AB = AM + BN,$$

condizione equivalente a dire che il quadrilatero $ABNM$ sia circoscrivibile ad una circonferenza.

Si supponga ora che il quadrilatero $ABNM$ sia circoscrivibile ad una circonferenza, pertanto si ha:

$$MN + AB = AM + BN.$$

Poiché vale sempre la condizione $MN = \frac{AB}{2}$ risulta $AM + BN = 3\frac{AB}{2}$ e pertanto si ricava come prima:

$$AS + BT = AB.$$

Siano ora P_1 e P_2 i punti di incontro col segmento AB rispettivamente delle bisettrici di $A\widehat{S}T$ e $B\widehat{T}S$. In modo del tutto analogo al precedente si ricava $AS = AP_1$ e $BT = BP_2$. Pertanto $AP_1 + P_2B = AB$ e quindi necessariamente $P_1 = P_2$.

17. L'unica soluzione è $(6, 10, 15)$. Osserviamo anzitutto che 45 divide z^3, e quindi z è divisibile per $3 \cdot 5 = 15$. Analogamente 8 divide xy^2, e quindi x e y non possono essere dispari entrambi. Poniamo $z = 15w$ e distinguiamo 3 casi:

(1) x dispari: allora 8 divide y^2, quindi 4 divide y e, posto $y = 4v$, il sistema diviene $\begin{cases} 2xv^2 = 75w^3 \\ xvw < \frac{50}{3} \end{cases}$ impossibile perché dalla prima equazione segue che 15 divide xv e 2 divide w, da cui $xvw \geq 30$.

(2) y dispari: allora 8 divide x e, posto $x = 8u$, il sistema diviene $\begin{cases} uy^2 = 75w^3 \\ uyw < \frac{25}{3} \end{cases}$ che è ancora impossibile perché 15 divide uy, quindi $uyw \geq 15$.

(3) x e y pari: posto $x = 2u$, $y = 2v$ il sistema diviene $\begin{cases} uv^2 = 75w^3 \\ uvw < \frac{50}{3} \end{cases}$. Come prima si ha che 15 divide uv, quindi la seconda disequazione implica $uv = 15$, $w = 1$ e, dalla prima, $uv^2 = 75$; quindi $v = 5$, $u = 3$, $w = 1$.

SECONDA SOLUZIONE

L'unica soluzione è $(6,10,15)$.

Notiamo innanzitutto che sia 3 sia 5 dividono $8z^3$ per cui, essendo 8 primo con entrambi, 3 e 5 devono dividere z^3 e quindi anche z. Poniamo allora $z = 15z'$, per cui la prima equazione diventa $xy^2 = 600z'^3$ con la condizione $xyz' < 1000/15 < 67$. Se z' fosse maggiore o uguale a 2 si avrebbe che

$$x^2y^2 \geq xy^2 = 600z'^3 \geq 600 \cdot 2^3 = 4800.$$

Questo implicherebbe $xy > 69$ in contraddizione con la condizione $xyz' < 67$. Pertanto $z' = 1$ e l'equazione diventa $xy^2 = 600$ con la condizione $xy < 67$. Se x fosse maggiore o uguale a 8 si avrebbe che

$$x^2y^2 \geq 8xy^2 = 8 \cdot 600 = 4800.$$

Questo implicherebbe nuovamente $xy > 69$ ottenendo un altro assurdo, per cui si ha $x < 8$. Poiché $y^2 = \dfrac{600}{x}$ si ha che $\dfrac{600}{x}$ è il quadrato di un numero intero. Una facile verifica mostra che l'unica possibilità è $x = 6$ da cui si ricava $y = 10$ e $z = 15$. D'altra parte la terna $(6,10,15)$ è soluzione del sistema.