Esercitazioni di Geometria 1

Roberto Zanasi

29 luglio 2003

Introduzione

Questi sono gli appunti del corso di esercitazioni di Geometria del diploma di ingegneria informatica dell'Università di Modena. Sono liberamente distribuibili in qualunque forma, purché non vengano alterati in alcun modo.

Chiunque legga questo documento è invitato a fare osservazioni o segnalare gli eventuali errori in esso presenti. La ricompensa sarà una citazione in questa introduzione. Non si fa nessuna garanzia sull'esattezza del contenuto, anche se l'autore ha cercato di renderlo il più possibile privo di errori.

Questa è la versione 1.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Principio di induzione

Il principio di induzione è un assioma che viene utilizzato come procedimento di dimostrazione. Si suppone data, per ogni n appartenente a $\mathbf{N}$, una proposizione $A(n)$, e si suppongono valide le seguenti affermazioni:

1. $A(1)$ è vera,
2. Per ogni k naturale, $k \geq 2$, se $A(k-1)$ è vera (ipotesi induttiva), allora $A(k)$ è vera,

allora si ha che $A(n)$ è vera per ogni n naturale.

Esercizio 1. *Dimostrare che l'n-esimo numero dispari è $2n-1$*

Indicando con d_n l'n-esimo numero dispari, la proposizione $A(n)$ per questo esercizio è

$$A(n): \; d_n = 2n - 1$$

1. La proposizione $A(1)$ è vera, infatti $d_1 = 1$.
2. Supponiamo che $A(k-1)$ sia vera, cioè $d_{k-1} = 2(k-1) - 1$. Proviamo $A(k)$, cioè proviamo che $d_k = 2k - 1$. Infatti si ha

$$d_k = d_{k-1} + 2 = 2(k-1) - 1 + 2 = 2k - 1.$$

Esercizio 2. *La somma dei primi n numeri dispari è n^2.*

La proposizione $A(n)$ in questo caso diventa:

$$A(n): \; \sum_{i=1}^{n} d_i = n^2.$$

1. $A(1)$ è vera, infatti $d_1 = 1 = 1^2$.
2. Supponiamo vera $A(k-1)$, cioè

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_i = (k-1)^2.$$

Proviamo $A(k)$, cioè $\sum_{i=1}^{n} d_i = n^2$. Infatti

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{k-1} d_i + d_k = (k-1)^2 + 2k - 1 = k^2.$$

(Notare che l'uguaglianza $d_k = 2k - 1$ è stata provata nell'esercizio 1)

Esercizio 3. *La somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$.*

La proposizione $A(n)$ in questo caso è

$$A(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. $A(1)$ è vera, infatti $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$.
2. Supponiamo vero $A(k-1)$, cioè che

$$1 + 2 + \cdots + k - 1 = \frac{(k-1)k}{2},$$

allora per dimostrare $A(k)$ si ha che

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + (k-1)}_{\frac{(k-1)k}{2}} + k = \frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Esercizio 4. *Dimostrare che*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - qn + 1}{1 - q}, \qquad q \neq 1, \quad q \in \mathbf{R}.$$

1. In questo esempio si può partire con $k = 0$. Per $k = 0$ la proposizione $A(0)$ è vera, infatti $1 = (1-q)/(1-q)$.
2. Se è vero per $k - 1$, allora per k si ha

$$\underbrace{1 + q + q^2 \cdots + q^{k-1}}_{\frac{1-q^k}{1-q}} + q^k = \frac{1 - q^k}{1 - q} + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Esercizio 5. *Dimostrare che*

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh, \qquad h > -1, \quad h \in \mathbf{R}.$$

1. Per $n = 1$ si ha che $1 + h \geq 1 + h$, vero.
2. Se è vero per $n - 1$, si dimostra per n in questo modo:

$$(1+h)^n = (1+h)^{n-1}(1+h) \geq (1+(n-1)h)(1+h) = (1+nh-h)(1+h) =$$
$$= 1 + nh + nh^2 - h^2 = 1 + nh + (n-1)h^2 \geq 1 + nh.$$

Esercizio 6. *Dimostrare che se A è un insieme di cardinalità n allora l'insieme delle parti di A, indicato con $\mathcal{P}(A)$, ha cardinalità 2^n.*

1. Per $n = 0$ si ha l'insieme di cardinalità nulla, cioè l'insieme vuoto. Allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$, e la cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ è $1 = 2^0$.

2. Se è vero per $n-1$, si dimostra per n in questo modo. Sia A un insieme di cardinalià n, e si fissi un elemento $a \in A$. Allora si possono costruire i seguenti due insiemi:

$$A_1 = \{B \subseteq A | a \in B\},$$
$$A_2 = \{C \subseteq A | a \notin B\}.$$

Tali insiemi godono delle seguenti proprietà:

- Sono disgiunti, cioè $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
- Hanno la stessa cardinalità, perché la seguente applicazione è biunivoca:

$$\begin{aligned} f\colon A_2 &\longrightarrow A_1 \\ C &\longmapsto B = C \cup \{a\} \end{aligned}$$

- $A_2 = \mathcal{P}(A \setminus \{a\})$ Su A_2 agisce quindi l'ipotesi di induzione, quindi la sua cardinalità è 2^{n-1}.

Poiché A_1 e A_2 sono disgiunti, si ha che

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{Card} A_1 + \operatorname{Card} A_2 = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.$$

Esercizio 7. *Sia S_n l'insieme delle permutazioni su n elementi; dimostrare che* $\operatorname{Card} S_n = n!$.

Nota: La definizione di $n!$ (n fattoriale) è la seguente:

$$n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1,$$
$$1! = 1,$$
$$0! = 1.$$

1. Per $n = 1$ l'insieme delle permutazioni su un unico elemento contiene solo la permutazione identica: $S_1 = \{\mathrm{id}\}$.

2. Se è vero per $n-1$, si dimostra che è vero per n in questo modo: sia $S_n = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$, dove

$$X_i = \{f\colon \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\} \mid f \text{ biunivoca}, f(i) = 1\}$$

Gli insiemi X_i godono delle seguenti proprietà:

- Sono disgiunti, cioè $X_i \cap X_j = \emptyset$, per ogni $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.
- X_i si identifica con le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ (infatti l'elemento i rimane "bloccato" nella posizione 1), e dunque con S_{n-1}. Per ipotesi induttiva $\operatorname{Card} S_{n-1} = (n-1)!$.

Allora si può concludere che

$$\operatorname{Card} S_n = \operatorname{Card} X_1 + \operatorname{Card} X_2 + \cdots + \operatorname{Card} X_n = n(n-1)! = n!$$

Per fissare le idee analizziamo S_3, che contiene 6 permutazioni. Conveniamo di indicare una permutazione con la terna (a, b, c), intendendo che $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$. Allora l'insieme S_3 può essere partizionato nei tre insiemi X_1, X_2, X_3 così fatti:

$$X_1 = \{(1,2,3),(1,3,2)\}$$
$$X_2 = \{(3,1,2),(2,1,3)\}$$
$$X_3 = \{(3,2,1),(2,3,1)\}$$

Esercizio 8. *"Trovare l'errore." Dimostrare che $n > n+1$ per ogni n naturale.*

Se è vero per $n - 1$, si dimostra per n in questo modo: l'ipotesi induttiva diventa $n - 1 > n$; allora si può scrivere che

$$n = (n-1) + 1 > n + 1.$$

L'errore di questa dimostrazione sta nel fatto che manca la prima parte: per $n = 1$ non è vero che $1 > 2$.

Esercizio 9. *"Trovare l'errore." Per ogni n, m naturali, si ha che $n = m$ (tutti i naturali sono uguali).*

In questa dimostrazione si suppone che anche 0 appartenga a $\mathbf{N}$. Si pone $h = \max\{n, m\}$ e si procede per induzione su h.

1. Se $h = 0$, allora $n = m = 0$.
2. Se è vero per $h - 1$, si dimostra per h in questo modo: se $\max\{n, m\} = h$ allora $\max\{n-1, m-1\} = h-1$, ma per ipotesi induttiva si ottiene quindi che $n - 1 = m - 1$, e cioè $n = m$.

L'errore di questa dimostrazione sta nel fatto che se n oppure m è uguale a zero, non si può calcolare $n - 1$ oppure $m - 1$, e quindi la conclusione precedente è sbagliata.

1.2 Costruzione dell'insieme Z dei numeri interi

Si costruisce una relazione $\mathcal{R}$ sull'insieme $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ così definita:

$$(n_1, m_1)\,\mathcal{R}\,(n_2, m_2) \Longleftrightarrow n_1 + m_2 = m_1 + n_2.$$

Si verifica che è una relazione di equivalenza, infatti valgono le proprietà

- riflessiva: $(n, m)\,\mathcal{R}\,(n, m)$, infatti $n + m = m + n$;
- simmetrica: $(n_1, m_1)\,\mathcal{R}\,(n_2, m_2)$ implica che $(n_2, m_2)\,\mathcal{R}\,(n_1, m_1)$, infatti se $n_1 + m_2 = m_1 + n_2$ allora anche $n_2 + m_1 = m_2 + n_1$;
- transitiva: se $(n_1, m_1)\,\mathcal{R}\,(n_2, m_2)$ e se $(n_2, m_2)\,\mathcal{R}\,(n_3, m_3)$, allora si ottiene che $(n_1, m_1)\,\mathcal{R}\,(n_3, m_3)$, perché le due ipotesi significano che

  $$n_1 + m_2 = m_1 + n_2$$
  $$n_2 + m_3 = m_2 + n_3$$

  e sommando membro a membro si ottiene

  $$n_1 + m_3 = m_1 + n_3$$

Dunque la relazione definita in precedenza è una relazione di equivalenza, e si può costruire l'insieme quoziente: si definisce infatti

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \times \mathbf{N}/\mathcal{R}$$

(per fissare le idee, alla classe di equivalenza $[(n, m)]$ corrisponde il numero $n - m$), con le seguenti operazioni di somma:

$$[(n_1, m_1)] + [(n_2, m_2)] = [(n_1 + n_2, m_1 + m_2)],$$

e di prodotto:

$$[(n_1, m_1)] \cdot [(n_2, m_2)] = [(n_1 n_2 + m_1 m_2, n_1 m_2 + n_2 m_1)].$$

È necessario verificare che tali definizioni sono ben poste, cioè che non cambiano al cambiare del rappresentante che si è scelto per la classe di equivalenza. Supponiamo di prendere due diversi rappresentanti della stessa classe, (n, m) e (a, b). Il fatto che essi rappresentano la stessa classe significa che

$$[(n, m)] = [(a, b)] \Longleftrightarrow n + b = m + a.$$

Occorre verificare che il risultato della operazione di somma non dipende dalla scelta di (n, m) al posto di (a, b). In altre parole, occorre verificare che i seguenti due calcoli portano allo stesso risultato:

$$\begin{aligned} [(n, m)] + [(c, d)] &= [(n + c, m + d)], \\ [(a, b)] + [(c, d)] &= [(a + c, b + d)]. \end{aligned}$$

E il risultato è lo stesso perché $n + c + b + d = a + c + m + d$.

Per verificare che anche la definizione di prodotto è ben posta si procede in maniera analoga: i seguenti due calcoli portano allo stesso risultato

$$\begin{aligned} [(n, m)] \cdot [(c, d)] &= [(nc + md, nd + mc)], \\ [(a, b)] \cdot [(c, d)] &= [(ac + bd, ad + bc)], \end{aligned}$$

perché

$$\begin{aligned} nc + md + ad + bc &= nd + mc + ac + bd, \\ c(n + b) + d(m + a) &= d(n + b) + c(m + a). \end{aligned}$$

Tale uguaglianza è verificata perché $n + b = m + a$.

1.3 Costruzione dell'insieme Q dei numeri razionali

Si costruisce una relazione $\mathcal{R}$ sull'insieme $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ così definita:

$$(n_1, m_1)\, \mathcal{R}\, (n_2, m_2) \Longleftrightarrow n_1 m_2 = m_1 n_2.$$

Si verifica che è una relazione di equivalenza, infatti valgono le proprietà

- riflessiva: $(n, m)\, \mathcal{R}\, (n, m)$, infatti $mn = nm$;

- simmetrica: $(n_1, m_1)\,\mathcal{R}\,(n_2, m_2)$ implica che $(n_2, m_2)\,\mathcal{R}\,(n_1, m_1)$, infatti se $n_1 m_2 = m_1 n_2$ allora anche $n_2 m_1 = m_2 n_1$;
- transitiva: se $(n_1, m_1)\,\mathcal{R}\,(n_2, m_2)$ e se $(n_2, m_2)\,\mathcal{R}\,(n_3, m_3)$, allora si ottiene che $(n_1, m_1)\,\mathcal{R}\,(n_3, m_3)$, perché le due ipotesi significano che

$$\begin{aligned} n_1 m_2 &= m_1 n_2, \\ n_2 m_3 &= m_2 n_3, \end{aligned}$$

e vale la seguente catena di uguaglianze:

$$n_1 m_3 m_2 = (n_1 m_2) m_3 = m_1 n_2 m_3 = (n_2 m_3) m_1 = m_2 n_3 m_1 = n_3 m_1 m_2,$$

e, considerando solo primo e ultimo membro:

$$\begin{gathered} n_1 m_3 m_2 = n_3 m_1 m_2 \\ n_1 m_3 = n_3 m_1 \\ (n_1, m_1)\,\mathcal{R}\,(n_3, m_3) \end{gathered}$$

Dunque la relazione definita in precedenza è una relazione di equivalenza, e si può costruire l'insieme quoziente: si definisce infatti

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$$

(per fissare le idee, alla classe di equivalenza $[(n, m)]$ corrisponde il numero n/m). Tralasciamo la definizione della somma e del prodotto, e la verifica del fatto che esse sono ben poste.

1.4 Esempi di applicazioni

Esercizio 10. *La legge che ad ogni numero naturale n diverso da zero associa i due numeri interi $+n$ e $-n$ non è una applicazione, perché non è vero che ad ogni elemento dell'insieme di partenza viene associato un solo elemento dell'insieme di arrivo.*

Esercizio 11. *Studiare la legge*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{N} \\ n &\longmapsto |n| \end{aligned}$$

È una applicazione suriettiva, ma non iniettiva, perché, ad esempio, $f(+1) = f(-1) = 1$.

Esercizio 12. *Studiare la legge*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{N} \\ n &\longmapsto 2n \end{aligned}$$

È una applicazione iniettiva, ma non suriettiva, perché, ad esempio, il numero 1 nell'insieme di arrivo non è immagine di alcun numero dell'insieme di partenza.

Esercizio 13. *Studiare la legge*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ n &\longmapsto -n \end{aligned}$$

È una applicazione suriettiva e iniettiva, quindi biunivoca. Esiste l'applicazione inversa f^{-1}, che in questo caso coincide con f.

Esercizio 14. *Studiare la legge*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (a, b, c) \qquad &\longmapsto x \mid ax^2 + bx + c = 0 \end{aligned}$$

Non è una applicazione, perché esistono terne di coefficienti (a, b, c) a cui corrispondono due soluzioni reali, e terne a cui non corrispondono soluzioni reali.

Esercizio 15. *Date le due applicazioni definite in* $\mathbf{R}$ *a valori in* $\mathbf{R}$ $f(x) = x+1$ *e* $g(x) = x^3$*, determinare le loro inverse e calcolare* $f \circ g$*,* $(f \circ g)^{-1}$*,* $g \circ f$ *e* $(g \circ f)^{-1}$

Le funzioni f e g sono entrambe biunivoche, altrimenti non si potrebbero calcolare le due inverse. Risulta che $f^{-1}(x) = x - 1$ e $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^3) = x^3 + 1 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^3 \\ (g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(x-1) = \sqrt[3]{x-1} = (f \circ g)^{-1} \\ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x} - 1 = (g \circ f)^{-1} \end{aligned}$$

1.5 Gruppi

Ricordiamo che un insieme G dotato di operazione si dice gruppo se valgono le seguenti tre proprietà:

1. associativa: $\forall a, b \in G \Longrightarrow (ab)c = a(bc)$,
2. esistenza dell'elemento neutro: $\exists e \in G \mid \forall a \in G \Longrightarrow ae = ea = a$,
3. esistenza dell'inverso: $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G \mid a \cdot a^{-1} = e$.

Esercizio 16. *L'insieme* S_3 *delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo*

Conveniamo di indicare una permutazione con una terna (a, b, c), come si era detto nell'esercizio 7. L'elemento neutro è dato dall'applicazione identica $(1, 2, 3)$. Iniziamo a costruire il gruppo operando su un elemento diverso dall'identità: per esempio, prendiamo $s_1 = (2, 3, 1)$. L'operazione $s_1 \circ s_1$ produce come risultato la permutazione $(3, 1, 2)$, a cui diamo il nome di s_2.

L'operazione $s_1 \circ s_2$ produce lo stesso risultato [1] di $s_2 \circ s_1$ che è $(1, 2, 3)$, cioè l'identità. Infine, l'operazione $s_2 \circ s_2$ produce come risultato s_1. Quindi si

[1] Questo non è sempre automatico, non è detto che l'operazione del gruppo sia commutativa

vede che i tre elementi e, s_1, s_2 formano un gruppo, che è un sottogruppo di S_3. Infatti S_3 contiene altri elementi: ad esempio contiene $a_1 = (1, 3, 2)$. Si noti anche che $a_1 \circ a_1 = e$. Componendo a_1 con s_1 si ottiene $a_1 \circ s_1 = (3, 2, 1)$, che è un nuovo elemento che chiamiamo a_2. Componendo invece s_1 con a_1 si ottiene un elemento diverso, $(2, 1, 3)$, a cui diamo il nome di a_3. Procedendo in questo modo si possono costruire tutti i possibili prodotti tra tutti gli elementi di S_3, ottenendo la seguente tavola moltiplicativa:

$\circ$	e	s_1	s_2	a_1	a_2	a_3
e	e	s_1	s_2	a_1	a_2	a_3
s_1	s_1	s_2	e	a_2	a_3	a_1
s_2	s_2	e	s_1	a_3	a_1	a_2
a_1	a_1	a_3	a_2	e	s_2	s_1
a_2	a_2	a_1	a_3	s_1	e	s_2
a_3	a_3	a_2	a_1	s_2	s_1	e

Esercizio 17. *L'insieme dei numeri interi* $\mathbf{Z}$ *con la somma è un gruppo commutativo.*[2]

Esercizio 18. *L'insieme* H *dei numeri interi multipli di 5 è un sottogruppo di* $\mathbf{Z}$.

Infatti è chiuso rispetto alla somma (sommando due multipli di 5 si ottiene ancora un multiplo di 5), e le tre proprietà elencate nella definizione di gruppo si possono verificare facilmente (la somma è associativa, l'elemento neutro è lo 0, l'inverso di a è $-a$).

Esercizio 19. *Determinare se l'insieme* $\mathbf{Z}$ *con l'operazione di sottrazione forma un gruppo.*

La risposta è negativa, perché non vale la proprietà associativa: $(a - b) - c$ è diverso da $a - (b - c)$.

Esercizio 20. *Determinare se l'insieme* $\{1, -1\}$ *con l'operazione di prodotto forma un gruppo.*

Sì, lo si può provare direttamente, effettuando tutte le operazioni. La tavola moltiplicativa del gruppo è questa:

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Esercizio 21. *Determinare se l'insieme dei numeri razionali positivi con la divisione è un gruppo.*

La risposta è negativa, perché non vale la proprietà associativa:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \neq \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}.$$

Esercizio 22. *L'insieme* $G = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ *con la somma è un gruppo.*

[2] I gruppi commutativi si dicono anche abeliani

Capitolo 2

Matrici

2.1 Somma di matrici e prodotto per uno scalare

Esercizio 23. *Date le seguenti matrici A e B, calcolare $A+B$, $3A$, $2A-3B$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

La somma di matrici si ottiene facendo la somma componente per componente, dunque le matrici devono avere lo stesso numero di righe e di colonne. Perciò

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto di uno scalare per una matrice si ottiene moltiplicando lo scalare per ogni elemento della matrice. Perciò:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, l'ultimo calcolo richiesto sarà:

$$2A-3B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -21 & 3 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}$$

Esercizio 24. *Calcolare la somma delle due matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 25. *Date le tre matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

calcolare $D = 3A+4B-2C$.

$$D = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 & -12 \\ 0 & -4 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & -25 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.2 Prodotto "righe per colonne"

Due matrici si possono moltiplicare con il procedimento detto "prodotto righe per colonne" se il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda; in tal caso, le matrici si dicono conformabili.

Per esempio:

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}.$$

La prima matrice è $\mathbf{2} \times 2$, la seconda è $2 \times \mathbf{3}$, il risultato è $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$.

Esercizio 26. *Verificare che il prodotto di matrici non è commutativo operando sulle matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto non è commutativo perchè $AB \neq BA$, infatti:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1+4 \\ 3 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 27. *Calcolare il seguente prodotto:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9 & -6 & -4+18 \\ 4-3 & 2 & -8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 28. *Calcolare il seguente prodotto:*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Notare che il risultato sarà una matrice 1×3, *infatti:*

$$P = \begin{pmatrix} 2+4 & -4+5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 29. *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ *trovare una matrice colonna* $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ *tale che valga la relazione* $Au = 3u$.

Con il simbolo $\mathbf{0}$ si intende la matrice[1] nulla, cioè quella che ha ogni componente nulla.

Si ha che

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 4x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}.$$

Si imposta così un sistema:

$$\begin{cases} x+3y & = 3x \\ 4x-3y & = 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x+3y & = 0 \\ 4x-6y & = 0 \end{cases} \qquad x = \frac{3}{2}y.$$

Ci sono quindi infinite matrici u che soddisfano alla richiesta dell'esercizio; ponendo ad esempio $y = 2$ si ottiene $x = 3$ e $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 30. *Moltiplicare fra loro, in entrambi i modi, le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha che

$$AB = \begin{pmatrix} 2-3 & -4-4 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3+12 & 6+16 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2-2+15 & -1-20 \\ 6+4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ancora una volta si vede che il prodotto non è commutativo.

Esercizio 31. *Moltiplicare fra loro, in entrambi i modi, le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso il prodotto non è commutativo, infatti

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 18 & 12 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \end{pmatrix}.$$

Nel secondo caso si ottiene una matrice 1×1, che corrisponde a uno scalare.

Ricordiamo che scambiando le righe con le colonne si ottiene una nuova matrice che si dice trasposta. Per esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

allora la matrice trasposta sarà

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

[1] con un numero opportuno di righe e di colonne

Esercizio 32. *Data la matrice A definita come sopra, calcolare AA^t e A^tA.*

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1+4 & 3-2 \\ 3-2 & 9+1+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix},$$
$$A^tA = \begin{pmatrix} 1+9 & 2-3 & 12 \\ 2-3 & 4+1 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 33. *Date le due matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

verificare la proprietà $(AB)^t = B^tA^t$.

La matrice AB è

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1+8 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi la trasposta sarà

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto delle due matrici trasposte è

$$B^tA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1+8 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Determinante

Ricordiamo la definizione di determinante di una matrice quadrata A: se n è il numero di righe e colonne, e se con σ si intende una generica permutazione sull'insieme $\{1, \dots, n\}$, indicata con $(j_1, \dots, j_n)$, allora il determinante di A è dato da

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma a^1_{j_1} a^2_{j_2} \dots a^n_{j_n},$$

dove con sign si intende il segno della permutazione σ: una permutazione è pari se vi è un numero pari di coppie (i, k) tali che $i > k$ e i precede k nell'ordinamento dato da σ.

Consideriamo per esempio il determinante di una matrice di ordine 2. Le permutazioni di S_2 sono due: $(1, 2)$ e $(2, 1)$ (confronta anche l'esercizio 7). La prima è pari, la seconda dispari. Perciò si avrà

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1.$$

Per quanto riguarda le matrici di ordine 3, ci sono $3! = 6$ permutazioni in S_3. Eccole:

$$\text{pari: } \begin{cases} (1,2,3) \\ (2,3,1) \\ (3,1,2) \end{cases} \qquad \text{dispari: } \begin{cases} (3,2,1) \\ (2,1,3) \\ (1,3,2) \end{cases}$$

Dunque il calcolo del determinante si sviluppa in questo modo:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3$$

Tale determinante si può anche calcolare in questo modo (ricordando magari lo sviluppo secondo Laplace)

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

Esercizio 34. *Calcolare il determinante della matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(6-63) - 3(5-56) + 4(45-48) = -114 + 153 - 12 = 27.$$

Esercizio 35. *Calcolare il determinante della matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(-20+2) + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = -36 + 6 - 16 = -46.$$

Esercizio 36. *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Utilizziamo il termine $a_3^2 = 1$ per annullare la terza colonna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \boxed{1} & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

la seconda riga viene moltiplicata per -2 e poi viene sommata alla prima riga

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

la seconda riga viene moltiplicata per 3 e sommata alla terza riga

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

infine la seconda riga viene sommata alla quarta

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

in questo modo si è ottenuta una colonna con un solo elemento diverso da 0, la terza; si può così sviluppare con Laplace

$$\begin{aligned} &= -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -(4 - 3 + 2(2 - 9) + 5(1 - 6)) = -(1 - 14 - 25) = 38. \end{aligned}$$

Esercizio 37. *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si procede come nell'esercizio precedente, utilizzando il termine $a_1^3 = 1$ per annullare la prima colonna.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ \boxed{1} & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

la terza riga viene moltiplicata per -2 e sommata alla prima, poi viene moltiplicata per 2 e sommata alla seconda riga, infine viene sommata alla quarta riga

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} -1 & \boxed{1} & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

si può continuare ad usare lo sviluppo di Laplace, sommando la seconda colonna alla prima, poi moltiplicando la seconda colonna per 6 e sommandola alla terza

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -13 \\ -1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -13 \\ -1 & 17 \end{vmatrix} = -(17-13) = -4.$$

Esercizio 38. *Calcolare per quale valore di t il determinante di A è nullo, dove*

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante di A, cercando di raccogliere a fattor comune il maggior numero di fattori.

$$|A| = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$$

si somma la seconda colonna alla prima, poi alla terza: dalla prima colonna si potrà raccogliere il fattore comune $t+2$, dalla seconda $t-2$

$$= \begin{vmatrix} t+2 & 0 & 1 \\ t+2 & t-2 & 1 \\ 0 & t-2 & t+4 \end{vmatrix} = (t+2)(t-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t+4 \end{vmatrix}$$

la prima colonna viene moltiplicata per -1 e sommata alla terza

$$= (t+2)(t-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{\text{t+4}} \end{vmatrix}$$

si può così applicare lo sviluppo di Laplace all'elemento a_3^3

$$= (t+2)(t-2)(t+4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (t+2)(t-2)(t+4).$$

Dunque ci sono tre valori per i quali $|A| = 0$: $t = 2$, $t = -2$, $t = -4$.

Esercizio 39. *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il termine a_1^2 per annullare il resto della seconda riga:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & -2 \\ 4 & -3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

si usa lo sviluppo di Laplace a partire dal termine a_1^2

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ \boxed{\text{-1}} & 7 & -2 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 18 & -1 \\ \boxed{\text{-1}} & 7 & -2 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 18 & -1 \\ -1 & 7 & -2 \\ 0 & -13 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} 18 & -1 \\ -13 & 8 \end{vmatrix} = -(144 - 13) = -131.$$

Esercizio 40. *Risolvere la seguente equazione:*

$$\begin{vmatrix} x & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x & x & \beta_1 & \beta_2 \\ x & x & x & \gamma_1 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0.$$

Sottraendo dalla prima la seconda colonna, e sviluppando secondo Laplace, si ottiene

$$\begin{vmatrix} x & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x & x & \beta_1 & \beta_2 \\ x & x & x & \gamma_1 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & x & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & x & x & \gamma_1 \\ 0 & x & x & x \end{vmatrix} = (x-\alpha_1) \begin{vmatrix} x & \beta_1 & \beta_2 \\ x & x & \gamma_1 \\ x & x & x \end{vmatrix}$$

sottraendo ancora dalla prima la seconda colonna, e sviluppando ancora, si ottiene

$$= (x-\alpha_1) \begin{vmatrix} x-\beta_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & x & \gamma_1 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = (x-\alpha_1)(a-\beta_1) \begin{vmatrix} x & \gamma_1 \\ x & x \end{vmatrix}$$

procedendo per un'ultima volta come sopra, si ottiene

$$= (x-\alpha_1)(x-\beta_1) \begin{vmatrix} x-\gamma_1 & \gamma_1 \\ 0 & x \end{vmatrix}$$
$$= (x-\alpha_1)(x-\beta_1)(x-\gamma_1)x = 0.$$

L'equazione data ha quindi 4 soluzioni: $x = 0$, $x = \alpha_1$, $x = \beta_1$, $x = \gamma_1$.

Esercizio 41. *Risolvere la seguente equazione:*

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 3 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Sommando le ultime tre colonne alla prima, si ottiene

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 3 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+6 & 1 & 2 & 3 \\ x+6 & x & 3 & 2 \\ x+6 & 3 & x & 1 \\ x+6 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

si può raccogliere il fattore $(x + 6)$ dalla prima colonna e annullare tutti gli elementi della prima colonna, sottraendo la prima riga da tutte le altre

$$= (x+6)\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x-2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

ora si può sviluppare secondo Laplace

$$= (x+6)\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ 2 & x-2 & -2 \\ 1 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

si somma la seconda colonna alla prima e si raccoglie il fattore comune

$$= (x+6)\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ x & x-2 & -2 \\ 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = x(x+6)\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 1 & x-2 & -2 \\ 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

si sottrae la prima riga dalla seconda e si sviluppa ancora

$$\begin{aligned} &= x(x+6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-3 & -1 \\ 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = x(x+6)((x-3)^2-1) \\ &= x(x+6)(x^2-6x+8) = x(x+6)(x-4)(x-2). \end{aligned}$$

Dunque le soluzioni dell'equazione sono 4: $x = 0$, $x = -6$, $x = 4$, $x = 2$.

2.4 Matrice inversa

Si chiama "matrice aggiunta" la trasposta della matrice dei cofattori. La matrice inversa di una matrice A si ottiene così:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{agg} A.$$

Esercizio 42. *Calcolare l'inversa della matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Prima di tutto si calcola il determinante di A, ancora con Laplace:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4+6 = 2.$$

Poi si trova la matrice aggiunta:

$$\operatorname{agg} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che

$$A \cdot \operatorname{agg} A = \begin{pmatrix} 1-20+21 & 1+8-9 & -1+4-3 \\ 2-30+28 & 2+12-12 & -2+6-4 \\ 1-50+49 & 1+20-21 & -1+10-7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot I_3.$$

Si ha infine che

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{agg} A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 43. *Trovare l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale (lo si vede applicando ripetutamente lo sviluppo di Laplace). Dunque $|A| = 1$, e la matrice inversa coincide con la matrice aggiunta.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che anche $|A^{-1}| = 1$.

Esercizio 44. *Determinare la generica matrice A quadrata, di ordine 2, per la quale $A = \operatorname{agg} A$.*

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la matrice aggiunta si ottiene così:

$$\operatorname{agg} A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Dunque, perché $A = \operatorname{agg} A$, deve essere

$$\begin{cases} a = d \\ b = -b \\ c = -c \\ d = a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = d \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

La matrice richiesta è quindi del tipo

$$A = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad \forall d \in \mathbf{R}.$$

2.5 Matrici ortogonali

Una matrice A si dice ortogonale se $A^{-1} = A^t$. Vediamo ora come è fatta una generica matrice ortogonale di ordine 2. Una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è ortogonale se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cioè se valgono le seguenti uguaglianze:

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{2.1}$$
$$c^2 + d^2 = 1 \tag{2.2}$$
$$ac + bd = 0 \tag{2.3}$$
$$a^2 + c^2 = 1 \tag{2.4}$$
$$b^2 + d^2 = 1 \tag{2.5}$$
$$ab + cd = 0. \tag{2.6}$$

Condizione necessaria e sufficiente perché in $\mathbf{R}$ valgano rispettivamente le equazioni 2.1 e 2.2 è che esista uno e un solo $\phi \in [0, 2\pi)$ ed uno e un solo $\psi \in [0, 2\pi)$ tali che

$$\begin{cases} a = \cos\phi \\ b = \sin\phi \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \cos\psi \\ d = \sin\psi \end{cases}$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione 2.3 si ottiene

$$\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi = \cos(\phi - \psi) = 0,$$

da cui $\phi - \psi = \pi/2$ oppure $\phi - \psi = 3\pi/2$. Poiché, per tali valori, anche le equazioni 2.4, 2.5, 2.6 risultano soddisfatte, e poiché valgono le relazioni

$$\begin{gathered}
\cos\psi = \cos(\phi - \pi/2) = \sin\phi \\
\cos\psi = \cos(\phi - 3\pi/2) = -\sin\phi \\
\sin\psi = \sin(\phi - \pi/2) = -\cos\phi \\
\sin\psi = \sin(\phi - 3\pi/2) = \cos\phi
\end{gathered}$$

si conclude che l'insieme che contiene tutte le matrici ortogonali è

$$\begin{aligned}
&\Theta_2(\mathbf{R}) = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \mid \phi \in [0, 2\pi) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \mid \phi \in [0, 2\pi) \right\}.
\end{aligned}$$

Si noti che il determinante di una matrice ortogonale è 1.

Esercizio 45. *L'insieme $\Theta_2(\mathbf{R})$ è un gruppo, detto gruppo ortogonale.*

Infatti il prodotto di matrici è associativo; l'elemento neutro è $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; l'inversa di una matrice A è A^t. L'insieme delle matrici ortogonali è chiuso rispetto al prodotto, perché date due matrici ortogonali A e B si ha che AB è ortogonale, infatti

$$AB(AB)^t = ABB^tA^t = A(BB^t)A^t = AA^t = I.$$

Capitolo 3

Spazi vettoriali

Ricordiamo che $V(\mathbf{K})$, dotato delle operazioni di somma e prodotto, si dice spazio vettoriale se valgono le seguenti proprietà per ogni u, v, w appartenenti a V e per ogni k, a, b appartenenti a $\mathbf{K}$:

1. associativa della somma: $(u+v)+w = u+(v+w)$,
2. esistenza dell'elemento neutro per la somma: $\exists\, \mathbf{0} \in V \mid u + \mathbf{0} = u$,
3. esistenza dell'inverso: $\forall u \in V\ \exists -u \in V \mid u + (-u) = \mathbf{0}$,
4. commutativa della somma: $u + v = v + u$,
5. distributiva del prodotto: $k(u+v) = ku + kv$,
6. distributiva della somma: $(a+b)u = au + bu$,
7. associativa del prodotto: $(ab)u = a(bu)$,
8. esistenza dell'elemento neutro del prodotto: $\exists \mathbf{1} \in \mathbf{K} \mid \mathbf{1}u = u$.

Le prime quattro proprietà rendono V un gruppo commutativo (con struttura additiva).

Dalla definizione precedente seguono le seguenti proprietà degli spazi vettoriali:

1. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
2. $0u = 0$,
3. se $ku = \mathbf{0}$ allora $k = 0$ oppure $u = \mathbf{0}$,
4. $(-k)u = k(-u) = -ku$.

Notare la differenza tra "0" (elemento neutro del campo $\mathbf{K}$) e "$\mathbf{0}$" (vettore nullo). D'ora in poi verranno entrambi indicati con "0", a meno che non vi sia ambiguità.

Esercizio 46. *Dimostrare che $\mathbf{R}^n(\mathbf{R})$ (insieme delle n-uple di elementi di $\mathbf{R}$) è uno spazio vettoriale.*

Esercizio 47. *Dimostrare che $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$ (insieme delle matrici $m \times n$ su $\mathbf{R}$) è uno spazio vettoriale.*

Esercizio 48. *Dimostrare che*

$$V = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$$

è uno spazio vettoriale.

All'insieme V appartengono tutti i polinomi di grado minore o uguale a 3. È facile vedere che vale la proprietà associativa della somma (perché si tratta in pratica di sommare i coefficienti, e la somma in $\mathbf{R}$ è associativa), che esiste il vettore nullo (è il polinomio nullo), che esiste l'inverso (basta cambiare segno ai coefficienti), che vale la proprietà commutativa della somma (per lo stesso motivo per cui vale la proprietà associativa), eccetera.

3.1 Sottospazi vettoriali

Dato uno spazio vettoriale $V(\mathbf{K})$, l'insieme W si dice sottospazio vettoriale di V se valgono le seguenti proprietà:

1. $W \neq \emptyset$,
2. W è chiuso rispetto alla somma (cioè $\forall u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$),
3. W è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare (cioè $\forall k \in \mathbf{K}, \forall u \in W \Rightarrow ku \in W$).

In alternativa alla precedente definizione, si può dire che W è un sottospazio vettoriale di V se valgono le seguenti proprietà:

1. $\mathbf{0} \in W$,
2. $\forall v, w \in W, \forall a, b \in \mathbf{K} \Longrightarrow av + bw \in W$.

Esercizio 49. *Sia $V = \mathbf{R}^3$, e sia $W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Dimostrare che W è sottospazio vettoriale di V.*

Esercizio 50. *Sia $V = \mathcal{M}_{n\times m}$, e sia W l'insieme delle matrici simmetriche, cioè*

$$W = \{A = (a^i_j) \mid a^i_j = a^j_i\}.$$

Dimostrare che W è sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 51. *Dimostrare che $W = \{ax + b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ (l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a 1) è un sottospazio dello spazio vettoriale considerato nell'esercizio 48.*

Esercizio 52. *Sia $V = \mathbf{R}^3$, e sia $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$. Dimostrare che W è sottospazio vettoriale di V.*

Il vettore nullo, cioè $(0, 0, 0)$, appartiene a W, perché $0 + 0 + 0 = 0$. Presi due vettori $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$ di W, e presi due scalari k e k', si ha che

$$kv + k'v' = (ka + k'a', kb + k'b', kc + k'c').$$

Tale vettore appartiene ancora a W perché

$$ka + k'a' + kb + k'b' + kc + k'c' = k\underbrace{(a + b + c)}_{0} + k'\underbrace{(a' + b' + c')}_{0} = 0.$$

Esercizio 53. *Sia $V = \mathbf{R}^3$, e $W = \{(a, b, c) \mid a \geq 0\}$. W è un sottospazio vettoriale di V?*

La risposta è no, perché W non è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare: se, per esempio, si pone $k = -1$ e $w = (1, 2, 3)$, si ha che $kw = (-1, -2, -3)$ non appartiene a W.

Esercizio 54. *Sia $V = \mathbf{R}^3$ e $W = \{(a, b, c) \mid a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$ (l'insieme dei vettori di "lunghezza" minore o uguale a 1). W è sottospazio vettoriale di V?*

La risposta è no, perché W non è chiuso rispetto alla somma: se si prendono i due vettori $v = (1, 0, 0)$, e $w = (0, 1, 0)$, si ha che $v+w = (1, 1, 0)$ non appartiene a W.

Esercizio 55. *Sia $V = \mathbf{R}^3$ e $W = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$. W è sottospazio vettoriale di V?*

La risposta è no, perché W non è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare: se si prendono $k = \sqrt{2}$ e $v = (1, 2, 3)$, si ha che $kv = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ non appartiene a W.

Esercizio 56. *Sia $V = \mathcal{M}_{n\times m}$ e, fissata una matrice $T \in \mathcal{M}$, sia $W = \{A \in V \mid AT = TA\}$. W è sottospazio vettoriale di V?*

Il vettore nullo (cioè la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) appartiene a W, perché $\mathbf{0}T = T\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Date due matrici A e B appartenenti a W, cioè tali che $AT = TA$ e $BT = TB$, si considerino due scalari a e b appartenti a $\mathbf{K}$e si costruisca la combinazione lineare $aA + bB$. Tale combinazione lineare appartiene ancora a W perché

$$\begin{aligned}(aA + bB)T = a(AT) + b(BT) = a(TA) + b(TB) = \\ = T(aA) + T(bB) = T(aA + bB).\end{aligned}$$

Dunque W è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 57. *Sia $V = \{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\}$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali a variabile reale.[1] L'insieme $W = \{f \in V \mid f(3) = 0\}$ è uno sottospazio vettoriale di V?*

Si noti che il vettore nullo di V è la funzione (che indichiamo con $\mathbf{0}$) che ad ogni $x \in \mathbf{R}$ associa lo zero (cioè $\mathbf{0}(x) = 0$ per ogni x). Si ha quindi che $\mathbf{0} \in W$ perché $\mathbf{0}(3) = 0$; e date due funzioni f e g di W, dati due scalari a e b reali, si ha che la funzione $af + bg$ appartiene a W, infatti

$$(af + bg)(3) = af(3) + bg(3) = 0.$$

Dunque W è sottospazio vettoriale di V.

[1] Esercizio: dimostrare che V è uno spazio vettoriale.

Esercizio 58. *Sia V lo stesso spazio vettoriale considerato nell'esercizio 57. Sia $W = \{f \in V \mid f(7) = f(1)\}$. Dimostrare che W è sottospazio vettoriale di V.*

Il vettore nullo appartiene a W, perché $\mathbf{0}(7) = \mathbf{0}(1) = 0$. Date due funzioni f e g di W (cioè tali che $f(7) = f(1)$ e $g(7) = g(1)$), e dati due scalari a e b, la combinazione lineare $af + bg$ appartiene a W perché

$$(af + bg)(7) = af(7) + bg(7) = af(1) + bg(1) = (af + bg)(1).$$

Esercizio 59. *Sia V lo stesso spazio vettoriale considerato nell'esercizio 57 a pagina 25. Sia $W = \{f \in V \mid f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbf{R}\}$. W è un sottospazio vettoriale?*

Se si prende una funzione sempre maggiore o uguale a zero, e la si moltiplica per uno scalare negativo, si ottiene una funzione che non appartiene più a W: se $f(x) = x^2$ e $k = -1$ si ha che $kf \notin W$, perché $kf(x) = -x^2$. Dunque W non è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 60. *Sia V lo stesso spazio vettoriale considerato nell'esercizio 57 a pagina 25 e sia $W = \{f \in V \mid f(7) = 2 + f(1)\}$. Dimostrare che W non è un sottospazio vettoriale di V.*

W non è chiuso rispetto alla somma: date due funzioni f e g di W, si ha che

$$\begin{aligned}(f+g)(7) = f(7) + g(7) = 2 + f(1) + 2 + g(1) &= \\ &= 4 + (f+g)(1) \neq 2 + (f+g)(1).\end{aligned}$$

Esercizio 61. *Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$, e $W = \{A \in V \mid |A| = 0\}$. L'insieme W è sottospazio vettoriale di V?*

L'insieme W non è chiuso rispetto alla somma, e quindi non è un sottospazio vettoriale. Infatti, se si considerano le due matrici a determinante nullo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice somma ha determinante diverso da zero, infatti

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Esercizio 62. *Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$, e $W = \{A \in V \mid A^2 = A\}$. L'insieme W è sottospazio vettoriale di V?*

L'insieme non è chiuso rispetto al prodotto: se infatti si considera la matrice identica $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, essa appartiene a W perché

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

mentre la matrice $2I$ non appartiene a W, perché

$$(2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq 2I.$$

3.2 Insiemi di generatori

Un insieme A si dice insieme di generatori per uno spazio vettoriale $V(\mathbf{K})$ se ogni elemento di V può essere scritto come combinazione lineare di elementi di A e scalari di $\mathbf{K}$.

Esercizio 63. *Dimostrare che gli elementi* $(1-x)^3$*,* $(1-x)^2$*,* $(1-x)$*,* 1 *costituiscono un insieme di generatori per lo spazio vettoriale* V *dell'esercizio 48 a pagina 24.*

Occorre dimostrare che ogni polinomio può essere scritto come combinazione lineare dei quattro generatori. In altre parole, occorre dimostrare che esistono quattro scalari k_1, k_2, k_3, k_4, tali che

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d &= k_1(1-x)^3+k_2(1-x)^2+k_3(1-x)+k_4, \\ &= k_1(1-3x+3x^2-x^3)+k_2(1-2x+x^2)+k_3(1-x)+k_4 \\ &= -k_1x^3+(3k_1+k_2)x^2+(-3k_1-2k_2-k_3)x \\ &\quad +(k_1+k_2+k_3+k_4). \end{aligned}$$

Dunque si hanno quattro condizioni, che permettono di impostare un sistema:

$$\begin{cases} -k_1 & = a \\ 3k_1+k_2 & = b \\ -3k_1-2k_2-k_3 & = c \\ k_1+k_2+k_3+k_4 & = d \end{cases}$$

che, risolto, diventa:

$$\begin{cases} k_1 & = -a \\ k_2 & = 3a+b \\ k_3 & = -3k_1-2k_2-c = 3a-6a-2b-c = -3a-2b-c \\ k_4 & = -k_1-k_2-k_3+d = a-3a-b+3a+2b+c+d = a+b+c+d \end{cases}$$

Dunque questo dimostra l'esistenza dei quattro scalari, e quindi i quatto elementi costituiscono un insieme di generatori.

Esercizio 64. *Dimostrare che gli elementi* x^3*,* x^2*,* x*,* 1 *costituiscono un insieme di generatori per lo spazio vettoriale* V *dell'esercizio 48 a pagina 24.*

Esercizio 65. *Dimostrare che i vettori* $(1,2,3)$*,* $(0,1,2)$*,* $(0,0,1)$ *generano* $\mathbf{R}^3$*.*

Perché i tre vettori siano generatori, occorre che un generico vettore di $\mathbf{R}^3$ sia esprimibile come loro combinazione lineare:

$$(x,y,z) = a(1,2,3)+b(0,1,2)+c(0,0,1),$$

cioè

$$\begin{cases} a = x \\ 2a+b = y \\ 3a+2b+c = z \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x \\ b = -2x+y \\ c = -3x+4x-2y+z \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x \\ b = -2x+y \\ c = x-2y+z \end{cases}$$

Questo dimostra che i tre scalari a, b e c esistono, quindi i tre vettori costituiscono un sistema di generatori.

3.3 Lineare dipendenza e indipendenza

Gli m vettori $v_1, \dots, v_m \in V$ si dicono linearmente dipendenti se esistono m scalari $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{K}$ non tutti nulli tali che

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = \mathbf{0}.$$

In caso contrario, gli m vettori si dicono linearmente dipendenti.

Esercizio 66. *Dimostrare che i quatto generatori considerati nell'esercizio 64 a pagina 27 sono linearmente indipendenti.*

Si costruisce una combinazione lineare dei quattro vettori, e la si pone uguale al vettore nullo:

$$a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = \mathbf{0}. \tag{3.1}$$

Un polinomio è nullo se tutti i suoi coefficienti sono uguali a zero; perciò, perché valga la 3.1, occorre che $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Esercizio 67. *Dimostrare che i quattro generatori considerati nell'esercizio 63 a pagina 27 sono linearmente indipendenti.*

Si costruisce una combinazione lineare dei quattro vettori, e la si pone uguale al vettore nullo:

$$a_1(1-x)^3 + a_2(1-x^2) + a_3(1-x) + a_4 = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Un polinomio è nullo se tutti i suoi coefficienti sono uguali a zero; perciò, perché valga la 3.2, occorre che

$$a_1(1 - 3x + 3x^2 - 3x^3) + a_2(1 - 2x + x^2) + a_3(1 - x) + a_4 = 0,$$
$$x^3(-3a_1) + x^2(3a_1 + a_2) + x(-3a_1 - 2a_2 - a_3) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 0.$$

Questo permette di impostare il sistema

$$\begin{cases} -3a_1 & = 0 \\ 3a_1 + a_2 & = 0 \\ -3a_1 - 2a_2 - a_3 & = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

Dunque i quattro vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 68. *Si considerino i due vettori $x^2 + 1$ e $x^2 - 1$ appartenenti allo spazio vettoriale V definito nell'esercizio 48 a pagina 24. Sono linearmente dipendenti?*

Per rispondere alla domanda, si costruisce una combinazione lineare dei due vettori e la si pone uguale al vettore nullo:

$$a(x^2 + 1) + b(x^2 - 1) = \mathbf{0}.$$

Risolvendo, si ottiene:

$$(a + b)x^2 + (a - b) = 0,$$

cioè

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ a = b \end{cases} \qquad a = b = 0.$$

Dunque i due vettori non sono linearmente dipendenti.

Esercizio 69. *Si considerino i tre vettori x^2+1, x, $(x+1)^2$ appartenenti allo spazio vettoriale V definito nell'esercizio 48 a pagina 24. Sono linearmente dipendenti?*

Anche in questo caso si uguaglia al vettore nullo una combinazione lineare dei tre vettori:

$$a(x^2+1)+bx+c(x^2+2x+1)=0. \tag{3.3}$$

Risolvendo si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+2c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-c \\ b=-2c \end{cases}$$

Si hanno dunque infinite soluzioni, che sono terne del tipo $(-c,-2c,c)$; quindi non è vero che l'unica combinazione lineare che rende vera la 3.3 è quella con coefficienti tutti nulli, infatti è sufficiente attribuire a c un valore diverso da zero per ottenere altri coefficenti (ad esempio, ponendo $c=-1$, si ottiene la terna $(1,2,-1)$). Quindi i tre vettori dati sono linearmente dipendenti.

Esercizio 70. *Sia $V=\mathbf{R}^3$ e, fissato $k\in\mathbf{R}$, si consideri $W=\{(x,y,z)\mid x+y=z+k\}$. Per quali valori di k si ha che W è sottospazio vettoriale di V? I vettori $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$ sono generatori di W? Sono indipendenti? E i vettori $(1,0,1)$ e $(1,1,2)$?*

L'insieme W è diverso dal vuoto, perché fissato k e fissati y e z è sempre possibile trovare un x tale che $x+y=z+k$. Considero ora due elementi di W, indicati con (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2). Poiché appartengono a W, sono valide le due relazioni

$$x_1+y_1=z_1+k, \qquad x_2+y_2=z_2+k.$$

La somma dei due vettori è il vettore $(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$, che deve appartenere a W. Deve essere quindi valida la relazione

$$x_1+x_2+y_1+y_2=z_1+z_2+k;$$

cioè

$$z_1+k+z_2+k=z_1+z_2+k,$$

e quindi $2k=k$, perciò $k=0$. Dunque, perché W sia chiuso rispetto alla somma, deve essere $k=0$.

Si consideri ora il prodotto tra uno scalare a e un vettore $(x,y,z)\in W$, cioè (ax,ay,az); perché anche questo vettore appartenga a W occorre che $ax+ay=az+k$, ma $ax+ay=a(x+y)=az+ak$, perciò $ak=k$ per ogni valore di a, quindi $k=0$. In conclusione W è sottospazio vettoriale di V se $k=0$. Dunque gli elementi di W sono terne del tipo $(x,y,x+y)$.

I due vettori $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$ sono generatori di W se un generico vettore di W può essere espresso come loro combinazione lineare, cioè se

$$\begin{aligned}(x,y,x+y)&=a_1(1,0,1)+a_2(0,1,1)\\&=(a_1,0,a_1)+(0,a_2,a_2)\\&=(a_1,a_2,a_1+a_2).\end{aligned}$$

Si imposta quindi il sistema

$$\begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_1 + a_2 = x + y \end{cases}$$

ed è immediato vedere che gli scalari a_1, a_2 cercati esistono, e quindi i vettori costituiscono un sistema di generatori. Per vedere se sono indipendenti, si risolve l'equazione

$$a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) = \mathbf{0},$$

che diventa

$$(a_1, a_2, a_1 + a_2) = \mathbf{0},$$

cioè $a_1 = a_2 = 0$. Quindi i vettori sono indipendenti.

Si ricordi che un insieme di generatori linearmente indipendenti si chiama base, e il numero di generatori linearmente indipendenti si chiama dimensione. Quindi $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ è una base per W, che ha dimensione 2.

Per quanto riguarda gli altri due vettori, $(1,0,1)$ e $(1,1,2)$, si procede allo stesso modo.

$$\begin{aligned}(x, y, x+y) &= a_1(1,0,1) + a_2(1,1,2) \\ &= (a_1, 0, a_1) + (a_2, a_2, 2a_2) \\ &= (a_1 + a_2, a_2, a_1 + 2a_2).\end{aligned}$$

Si imposta quindi il sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = x \\ a_2 = y \\ a_1 + 2a_2 = x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} a1 = x - y \\ a_2 = y \\ x - y + 2y = x + y \end{cases}$$

L'ultima equazione del sistema è una identità, e le prime due mostrano che la coppia di scalari cercata esiste: dunque anche questi due vettori sono un sistema di generatori. Per quanto riguarda la dipendenza lineare, si procede come sopra:

$$a_1(1,0,1) + a_2(1,1,2) = \mathbf{0},$$

cioè

$$(a_1 + a_2, a_2, a_1 + 2a_2) = \mathbf{0},$$

e quindi

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

Si conclude quindi che $a_1 = a_2 = 0$, e quindi anche questi due vettori sono indipendenti (e costituiscono quindi un'altra base per W).

Esercizio 71. *In $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ si considerino i quattro vettori*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sono linearmente indipendenti?

Occorre risolvere l'equazione

$$a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Che si traduce nel seguente sistema:

$$\begin{cases} a+b+2c+d=0\\ a+c+d=0\\ a+b+c+2d=0\\ b+c+d=0\end{cases} \qquad \begin{cases} a=-c-d\\ -c-d+b+2c+d=0\\ -c-d+b+c+2d=0\\ b+c+d=0\end{cases} \qquad \begin{cases} a=-c-d\\ b+c=0\\ b+d=0\\ b+c+d=0\end{cases}$$

Quindi si ottiene (sostituendo la seconda equazione nell'ultima) $a = b = c = d = 0$, perciò i vettori sono indipendenti.

Esercizio 72. *Per quali valori di x, y, z si ha che il vettore $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ è generato dai tre vettori $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, -1, 2)$, $w = (0, 3, -4)$?*

In altre parole l'esercizio chiede di trovare quale sia lo spazio vettoriale generato dai tre vettori u, v, w. Il procedimento è questo: si scrive una combinazione lineare dei tre vettori, e la si pone uguale al generico vettore di $\mathbf{R}^3$, si risolve il sistema e si guarda se questo sistema è sempre possibile oppure se vi sono delle condizioni. Nel primo caso, lo spazio vettoriale generato è tutto $\mathbf{R}^3$, nel secondo caso le condizioni determinano le equazioni del sottospazio vettoriale generato. Dunque l'equazione

$$(x, y, z) = a(2, 1, 0) + b(1, -1, 2) + c(0, 3, -4) = (2a + b, a - b + 3c, 2b - 4c),$$

diventa un sistema:

$$\begin{cases} 2a+b=x\\ a-b+3c=y\\ 2b-4c=z\end{cases} \qquad \begin{cases} b=x-2a\\ a-x+2a+3c=y\\ 2x-4a-4c=z\end{cases} \qquad \begin{cases} b=x-2a\\ 3a+3c=x+y\\ -4a-4c=-2x+z\end{cases}$$

La prima equazione ci permette di ricavare b. Dalla seconda e dalla terza si può ricavare la quantità $a + c$, cioè

$$a+c=\frac{x+y}{3},$$
$$a+c=\frac{2x-z}{4}.$$

Le due quantità al secondo membro devono quindi essere uguali, perciò

$$\frac{x+y}{3}=\frac{2x-z}{4},$$
$$4x+4y=6x-3z,$$
$$2x-4y-3z=0.$$

Perché dunque il sistema sia possibile, occorre che valga la relazione

$$2x-4y-3z=0 \quad\Longrightarrow\quad z=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y,$$

e perciò gli elementi dello spazio vettoriale generato dai tre vettori saranno del tipo $(x, y, \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y)$. Dunque non viene generato tutto $\mathbf{R}^3$, e i tre vettori dati sono per forza di cose dipendenti. Quest'ultima affermazione può anche essere dimostrata direttamente ponendo $x = y = z = 0$ nel sistema iniziale:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a - b + 3c = 0 \\ 2b - 4c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a \\ a + 2a + 3c = 0 \\ -4a - 4c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a \\ a + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

Perciò si ha

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -a \end{cases}$$

e quindi esistono degli scalari non tutti nulli che rendono nulla la combinazione lineare dei tre vettori u, v e w, che risultano quindi dipendenti.

Si noti che i primi due vettori non sono dipendenti, perché se si costruisce la combinazione lineare

$$a(2, 1, 0) + b(1, -1, 2) = 0,$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a - b = 0 \\ 2b = 0 \end{cases}$$

che, risolto, fornisce la soluzione $a = b = 0$. Quest'ultimo risultato si poteva anche dedurre osservando che i due vettori non sono multipli, e quindi non sono dipendenti.

Esercizio 73. *Dimostrare che il piano xy, $W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, in $\mathbf{R}^3$ è generato da $u = (1, 2, 0)$ e $v = (0, 1, 0)$.*

Dato un vettore generico $(a, b, 0) \in W$, si costruisce la combinazione lineare

$$(a, b, 0) = x(1, 2, 0) + y(0, 1, 0),$$

che porta alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x = a \\ 2x + y = b \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a \\ y = 2a - b \end{cases}$$

Dunque esistono i due scalari richiesti x e y, quindi il piano W è generato dai due vettori u e v.

3.4 Somma e intersezione di sottospazi vettoriali

Dati due sottospazi vettoriali U e W di V, il sottospazio somma è dato da

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Ad esempio, sia $U = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ e $W = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a, c \in \mathbf{R}\}$. Allora si ha che

$$\begin{aligned} U + W &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}, \\ U \cap W &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Si noti che vale la relazione

$$\underbrace{\dim U}_{2} + \underbrace{\dim W}_{2} = \underbrace{\dim U \cap W}_{1} + \underbrace{\dim U + W}_{3}.$$

Esercizio 74. *Siano $U = \{(a, b, c) \mid a = b = c\}$ e $W = \{(0, b, c)\}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$. Dimostrare che $U + W = \mathbf{R}^3$, e che $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$.*

Se $v = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, si vede facilmente che esso è scrivibile come combinazione lineare di due vettori appartenenti a U e a W, infatti

$$(a, b, c) = (a, a, a) + (0, b - a, c - a).$$

Per quanto riguarda l'intersezione, se $v = (a, b, c) \in U \cap W$, allora $(a, b, c) \in U$, quindi $a = b = c$, e il vettore v si può scrivere come $v = (a, a, a)$. Inoltre v appartiene anche a W, quindi deve essere $a = 0$. Perciò $v = (0, 0, 0)$.

Esercizio 75. *Siano $U = \{(a, b, 0)\}$ e $W = \mathcal{L}((1, 2, 3), (1, -1, 1))$ due sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$. Trovare un vettore che genera $U \cap W$.*

Per trovare le equazioni dello spazio vettoriale W si scrive una combinazione lineare dei due vettori generatori e la si pone uguale a un generico vettore (x, y, z):

$$a(1, 2, 3) + b(1, -1, 1) = (a + b, 2a - b, 3a + b) = (x, y, z),$$

impostando così un sistema

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2a - b = y \\ 3a + b = z \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x - b \\ 2x - 2b - b = y \\ 3x - 3b + b = z \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x - b \\ -3b = -2x + y \\ -2b = -3x + z \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si ottiene che

$$\begin{aligned} b &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, \\ b &= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y,$$

cioè

$$x = -\frac{2}{5}y + \frac{3}{5}z.$$

Perciò un generico vettore di W è del tipo $\left(-\frac{2}{5}y + \frac{3}{5}z, y, z\right)$. Consideriamo ora un generico vettore $v = (a, b, c) \in U \cap W$. Poiché v appartiene a U, bisogna che $c = 0$, e quindi $v = (a, b, 0)$. Inoltre, poiché v appartiene a W, bisogna che sia del tipo $\left(-\frac{2}{5}b + \frac{3}{5}c, b, c\right)$ ma, dato che $c = 0$, si ha che

$$v = \left(-\frac{2}{5}b, b, 0\right).$$

Ci sono quindi infiniti vettori che generano $U \cap W$, tutti si ottengono sostituendo valori non nulli a b nell'espressione generale di v: ad esempio, sono generatori i vettori $(-2/5, 1, 0)$, $(-2, 5, 0)$, $(2, -5, 0)$, eccetera.

Esercizio 76. *Dimostrare che i numeri complessi $w = 2 + 3i$ e $z = 1 - 2i$ costituiscono una base per il campo complesso $\mathbf{C}$ come spazio vettoriale sul campo reale $\mathbf{R}$.*

Un generico elemento di $\mathbf{C}$ è $v = a + bi$. Occorre verificare che esistono scalari reali x e y tali che $v = xw + yz$. Cioè

$$a + bi = x(2 + 3i) + y(1 - 2i) = 2x + y + (3x - 2y)i,$$

ovvero

$$\begin{cases} a = 2x + y \\ b = 3x - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = a - 2x \\ b = 3x - 2a + 4x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = a - 2x \\ 7x = b + 2a \end{cases}$$

Quindi si ottiene che

$$\begin{cases} x = \frac{b+2a}{7} \\ y = a - 2\frac{b+2a}{7} = \frac{11a-2b}{7} \end{cases}$$

e quindi gli scalari x e y esistono, e quindi w e z sono generatori. Sono inoltre indipendenti, perché da

$$aw + bz = 0$$
$$a(2 + 3i) + b(1 - 2i) = 0$$

si ricava

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a \\ 3a + 4a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Capitolo 4

Applicazioni lineari

Dati due spazi vettoriali $U(\mathbf{K})$ e $V(\mathbf{K})$, una applicazione $F : U \longrightarrow V$ si dice lineare se per ogni v, w vettori di U e per ogni k scalare di $\mathbf{K}$ si ha:

1. $F(v + w) = F(v) + F(w)$,
2. $F(kv) = kF(v)$.

Dalla definizione segue che una applicazione lineare "manda il vettore nullo nel vettore nullo", cioè $F(0) = 0$.

Esercizio 77. *Sia*

$$F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \qquad (x, y, z) \longmapsto (x, y, 0)$$

la funzione di "proiezione sul piano xy". Dimostrare che è una applicazione lineare.

Dati due vettori $v = (a, b, c)$ e $w = (a', b', c')$, si ha che

$$\begin{aligned} F(v + w) = F((a + a', b + b', c + c')) &= (a + a', b + b', 0) = \\ &= (a, b, 0) + (a', b', 0) = F(v) + F(w). \end{aligned}$$

Inoltre, preso $k \in \mathbf{R}$, si ha che

$$F(kv) = F((ka, kb, kc)) = (ka, kb, 0) = k(a, b, 0) = kF(v),$$

quindi F è una applicazione lineare.

Esercizio 78. *Data*

$$F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad (x, y) \longmapsto (x + 1, y + 2),$$

dimostrare che F non è una applicazione lineare.

Si ha che $F((0, 0)) = (1, 2) \neq (0, 0)$, quindi F non può essere lineare.

Esercizio 79. *Data*

$$F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n \qquad v \longmapsto \mathbf{0},$$

dimostrare che è una applicazione lineare (detta "applicazione zero").

Esercizio 80. *Data*

$$F : V \longrightarrow V \qquad v \longmapsto v,$$

dimostrare che è una applicazione lineare (detta "applicazione identica").

Esercizio 81. *Dato V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado qualsiasi, sia*

$$D : V \longrightarrow V \qquad f(x) \longmapsto f'(x),$$

l'applicazione che ad un polinomio fa corrispondere la sua derivata. Dimostrare che D è una applicazione lineare.

Come è noto, valgono le due proprietà per le derivate:

1. $D(f+g) = Df + Dg$,
2. $D(kf) = kDf$.

4.1 Nucleo e immagine di una applicazione lineare

Ricordiamo che, data una applicazione lineare $F : U \longrightarrow V$, si chiama nucleo di F, e si indica con $\ker F$, l'insieme dei vettori u appartenenti a U tali che $F(u) = \mathbf{0}$. Si chiama invece immagine di F, e si indica con $F(U)$, l'insieme $\{F(u) \mid u \in U\}$.

Esercizio 82. *Sia F la trasformazione lineare così definita:*

$$F(x, y, z, t) = (x - y + z + t, z + 2z - t, z + y + 3z - 3t).$$

Trovare l'immagine e il nucleo di F.

Il testo dell'esercizio non dice quali sono gli spazi vettoriali di partenza e di arrivo; in questo caso è evidente che si tratta di $\mathbf{R}^4$ per lo spazio di partenza e di $\mathbf{R}^3$ per quello di arrivo.

Per trovare l'immagine di F occorre trovare un insieme di generatori da cui, poi, estrarre una base; e per avere un insieme di generatori occorre trasformare, tramite F, una base dello spazio vettoriale di partenza. Poiché è possibile trasformare qualunque base, risulta conveniente usare la base canonica. Dunque si calcola

$$\begin{aligned} F(1,0,0,0) &= (1,1,1), \\ F(0,1,0,0) &= (-1,0,1), \\ F(0,0,1,0) &= (1,2,3), \\ F(0,0,0,1) &= (1,-1,-3). \end{aligned}$$

I quattro vettori risultanti costituiscono un insieme di generatori per lo spazio di arrivo, $\mathbf{R}^3$; evidentemente non possono formare una base.[1]

Ora occorre trovare, tra i quattro vettori trasformati, il massimo numero di vettori indipendenti. Per risolvere questo problema si può procedere in due

[1] Una base di $\mathbf{R}^3$ è composta da tre elementi; quattro sono per forza di cose linearmente dipendenti.

modi diversi: mediante l'uso delle combinazioni lineari, oppure mediante l'uso delle matrici.

Proviamo a vedere se i primi tre vettori sono indipendenti, costruendo la combinazione lineare tra di essi ed uguagliandola al vettore nullo:

$$a(1,1,1)+b(-1,0,1)+c(1,2,3)=(a-b+c,a+2c,a+b+3c)=\mathbf{0},$$

si imposta così un sistema

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2c=0 \\ a+b+3c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-2c \\ -2c-b+c=0 \\ -2c+b+3c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-2c \\ b=-c \\ -2c-c+3c=0 \end{cases}$$

L'ultima equazione è una identità, la prime due invece forniscono le infinite soluzioni $(-2c,-c,c)$, quindi i vettori sono dipendenti.

Ripetiamo il procedimento per altri tre vettori:

$$a(1,1,1)+b(-1,0,1)+c(1,-1,-3)=\mathbf{0}.$$

Il sistema risultante è

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a-c=0 \\ a+b-3c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=c \\ -b+2c=0 \\ b-2c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=c \\ b=2c \end{cases}$$

Anche in questo caso ci sono infinite soluzioni, del tipo $(c,2c,c)$, e quindi i vettori sono dipendenti.

Come si è visto, questo metodo è molto lungo, perché occorre provare per tutte le combinazioni di tre vettori e, nel caso che nessuna di queste risulti composta da vettori indipendenti, per tutte le combinaizioni di due vettori. Un metodo più rapido è quello che sfrutta le proprietà del determinante di una matrice: se due o più righe oppure colonne di una matrice sono dipendenti, il determinante è nullo. Quindi si potrebbe costruire una matrice con tre vettori scelti tra i quattro generatori, e calcolarne il determinante. Ad esempio:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Anche questo metodo, però, richiede molti calcoli. Un metodo ancora più rapido è quello della riduzione di una matrice a gradini: i quattro vettori vengono messi in riga, formando una matrice 4×3, e poi si opera sulla matrice riducendola a gradini; alla fine il numero di righe diverse da zero è uguale al numero di vettori indipendenti. In questo caso si ha:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque il numero di vettori indipendenti è due (ad esempio, i primi due vettori sono indipendenti), e quindi l'immagine di F ha dimensione 2.

Per quanto riguarda il nucleo, occorre risolvere l'equazione $F(x, y, z, t) = \mathbf{0}$, cioè il sistema

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + 2z - t = 0 \\ x + y + 3z - 3t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2z + t \\ -2z + t - y + z + t = 0 \\ -2z + t + y + 3z - 3t = 0 \end{cases}$$

che ha infinite soluzioni, che dipendono da due parametri:

$$\begin{cases} x = -2z + t \\ y = -z + 2t \end{cases}$$

Quindi le soluzioni del sistema possono essere scritte in questo modo: $(-2z + t, -z + 2t, z, t)$. Questo significa che il nucleo ha dimensione 2, e una base per il nucleo può essere trovata sostituendo una volta $s = 0$ e $t = 1$, ottenendo il vettore $(1, 2, 0, 1)$, e una seconda volta $s = 1$ e $t = 0$, ottenendo $(-2, -1, 1, 0)$. Dunque una base per $\ker F$ è l'insieme $\{(1, 2, 0, 1), (-2, -1, 1, 0)\}$. Si noti che deve valere la relazione

$$\dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F = \dim U, \tag{4.1}$$

dove $\operatorname{Im} F = F(U)$, e U è lo spazio vettoriale di partenza.

Esercizio 83. *Data la trasformazione lineare*

$$T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \qquad (x, y, z) \longmapsto (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z),$$

determinare una base per l'immagine e una per il nucleo di T.

Per trovare una base per l'immagine si trasformano i vettori di una base per l'insieme di partenza, e si cercano i vettori indipendenti tra tutti quelli trasformati:

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 0, 1), \\ T(0, 1, 0) &= (2, 1, 1), \\ T(0, 0, 1) &= (-1, 1, 2). \end{aligned}$$

Anche in questo caso si può procedere per tentativi, cercando prima se i tre vettori sono indipendenti, poi, nel caso non lo fossero, cercando se due lo sono, oppure si può procedere utilizzando il metodo della riduzione della matrice a gradini: mettendo in riga i tre vettori trasformati, si ottiene

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si nota quindi che i tre vettori sono dipendenti,[2] mentre sono indipendenti i primi due. Allora l'immagine di T ha dimensione 2, e una sua base è data da $\{(1, 0, 1), (2, 1, 1)\}$.

[2] E quindi il determinante della matrice quadrata dei tre vettori è nullo.

Per quanto riguarda la ricerca del nucleo, si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-z \\ x-2z-z=0 \\ x-z-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-z \\ x=3z \end{cases}$$

Ci sono infinite soluzioni, dipendenti da un parametro, che si possono scrivere così: $(3z, -z, z)$. Il nucleo ha quindi dimensione 1, e una sua base è data, per esempio, da $\{(3, -1, 1)\}$. Si noti che vale la formula 4.1 a pagina 38.

Esercizio 84. *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado qualunque, e sia $D : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare che ad un polinomio fa corrispondere la sua derivata. Si trovino il nucleo e l'immagine di D.*

Il nucleo di D è dato dall'insieme dei polinomi che hanno derivata nulla:

$$\ker D = \{p(x) \in V \mid Dp(x) = 0\},$$

cioè è formato da tutti i polinomi costanti, del tipo $p(x) = k$. L'immagine di D invece coincide con V, perché ogni polinomio di V può essere considerato come derivata di un polinomio di V. Quindi l'immagine ha dimensione infinita, mentre il nucleo ha dimensione 1, e la formula 4.1 a pagina 38 perde di significato.

Esercizio 85. *Data la applicazione lineare $T(x, y, z) = (x + 2y, 2x, -y, -4x - 3y)$, trovare immagine e nucleo di T.*

I trasformati dei vettori della base canonica sono

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,2,0,-4), \\ T(0,1,0) &= (2,0,-1,-3), \\ T(0,0,1) &= (0,0,0,0). \end{aligned}$$

Si osserva subito che i tre vettori non sono indipendenti (il terzo è il vettore nullo), mentre i primi due, non essendo multipli uno dell'altro, sono indipendenti. In altre parole, se si riduce a gradini la matrice contenente i vettori trasformati, si ottengono due righe diverse da zero. Il testo dell'esercizio non chiede solo di trovare una base per l'immagine, ma chiede di specificare come è fatto l'insieme $T(\mathbf{R}^3)$. Viene cioè chiesto di trovare $\mathcal{L}\left((1,2,0,-4),(2,0,-1,-3)\right)$. Si imposta allora l'equazione

$$(x, y, z, t) = a(1, 2, 0, -4) + b(2, 0, -1, -3),$$

che porta al sistema

$$\begin{cases} a+2b=x \\ 2a=y \\ -b=z \\ -4a-3b=t \end{cases} \qquad \begin{cases} a=y/2 \\ b=-z \\ 2b=x-a=x-y/2 \\ 3b=-4a-t=-2y-t \end{cases} \qquad \begin{cases} a=y/2 \\ b=-z \\ b=\dfrac{x-y/2}{2} \\ b=\dfrac{-2y-t}{3} \end{cases}$$

Quindi, perché il sistema sia soddisfatto, occorre che

$$-z = \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = -\frac{2y}{3} - \frac{t}{3};$$

da queste equazioni si ricava che

$$-z = \frac{x}{2} - \frac{y}{4}, \qquad \frac{y}{4} = \frac{x}{2} + z, \qquad y = 2x + 4z,$$

e che

$$-z = -\frac{2y}{3} - \frac{t}{3}, \qquad \frac{t}{3} = -\frac{2}{3}y + z, \qquad t = -2y + 3z,$$

sostituendo il valore di y trovato prima si ha

$$t = -4x - 8z + 3z, \qquad t = -4x - 5z.$$

Quindi un generico vettore dell'immagine di T si scrive come $(x, 2x+4z, z, -4x-5z)$; si noti che ponendo $x = 1$ e $z = 0$ si ritrova il vettore $(1, 2, 0, -4)$, mentre ponendo $x = 2$ e $y = -1$ si ritrova il vettore $(2, 0, -1, -3)$.

Un altro metodo per arrivare a queste conclusioni è il seguente: si impone che il generico vettore (a, b, c, d) sia uguale al trasformato di (x, y, z, t), cioè

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x = b \\ -y = c \\ -4x - 3y = d \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -c \\ x - 2c = a \\ x = b/2 \\ -4x - 3y = d \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -c \\ x = a + 2c \\ x = b/2 \\ -4a - 8c - 3y = d \end{cases}$$

Si ritrova, in pratica, il sistema precedente, anche se in questo caso le incognite sono x e y, e le condizioni vengono imposte sulle variabili a, b, c e d. Si arriva quindi alle stesse conclusioni di prima.

Per trovare il nucleo di T occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x = 0 \\ -y = 0 \\ -4x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi il nucleo è formato dai vettori del tipo $(0, 0, z)$, ha dimensione uguale a 1, ed una sua base è formata dal vettore $(0, 0, 1)$.

Esercizio 86. *Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$, e si fissi $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$; si consideri poi la trasformazione lineare*

$$T : V \longrightarrow V \qquad A \longmapsto AM - MA.$$

Si trovino una base per il nucleo e per l'immagine di T.

Per trovare il nucleo occorre risolvere l'equazione

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che, esplicitata, diventa

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 2x + 3y \\ z & 2z + 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3z & 3t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2z & 2x + 2y - 2t \\ -2z & 2z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si deve quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ x = -y + t \end{cases}$$

Dunque una generica matrice appartenente al nucleo di T è $\begin{pmatrix} -y+t & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$. Essa dipende da due parametri, e quindi il nucleo di T ha dimensione 2. Per trovare le matrici che formano una base, si può sostituire dapprima $y = 1$ e $t = 0$, ottenendo la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, poi $y = 0$ e $t = 1$, ottenendo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Per trovare una base per l'immagine di T, occorre risolvere l'equazione

$$\begin{pmatrix} -2z & 2x + 2y - 2t \\ -2z & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

che diventa un sistema

$$\begin{cases} -2z = a \\ -2z = c \\ 2z = d \\ 2x + 2y + 2t = b \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni si ricava che $a = c = -d$, mentre l'ultima non fornisce altre condizioni. Quindi una generica matrice appartenente all'immagine di T è $\begin{pmatrix} a & b \\ a & -a \end{pmatrix}$, dipendente da due parametri (quindi anche l'immagine di T ha dimensione 2). Una base per $T(V)$ potrebbe essere

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.2 Matrici associate ad una applicazione lineare

Esercizio 87. *Dato V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3, già considerato nell'esercizio 48 a pagina 24, data l'applicazione lineare $D : V \longrightarrow V$ che ad un polinomio fa corrispondere la sua derivata, e data la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ già considerata nell'esercizio 64 a pagina 27, si costruisca la matrice associata all'applicazione lineare D rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

La matrice associata a una trasformazione lineare si ottiene mettendo in colonna le componenti dei vettori trasformati dei vettori della base $\mathcal{B}$, rispetto alla stessa base:

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3, \\ D(x) &= 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3, \\ D(x^2) &= 0 + 2x + 0x^2 + 0x^3, \\ D(x^3) &= 0 + 0x + 3x^2 + 0x^3. \end{aligned}$$

La matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$ è quindi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Occorre prestare attenzione al fatto che vanno messe in colonna le componenti dei vettori trasformati rispetto alla base considerata: se la base non è quella canonica, tali componenti vanno calcolate prima di costruire la matrice associata. Si veda, per esempio, il prossimo esercizio.

Esercizio 88. *Data la applicazione lineare $T(x, y) = (4x-2y, 2x+y)$, e la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 0)\}$, si trovi la matrice associata alla trasformazione T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

I trasformati dei vettori della base $\mathcal{B}$ sono

$$\begin{aligned} T(1, 1) &= (2, 3), \\ T(-1, 0) &= (-4, -2). \end{aligned}$$

I vettori trasformati devono però essere espressi come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$; quindi è necessario risolvere le seguenti equazioni. Per quanto riguarda il primo vettore:

$$(2, 3) = a(1, 1) + b(-1, 0),$$

cioè

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Quindi $(2, 3) = 3(1, 1) + 1(-1, 0)$.

Per quanto riguarda il secondo vettore:

$$(-4, -2) = a(1, 1) + b(-1, 0),$$

cioè

$$\begin{cases} a - b = -4 \\ a = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Quindi $(-4, -2) = -2(1, 1) + 2(-1, 0)$, e la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 89. *Trovare una trasformazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la cui immagine sia generata da $(1, 2, 3)$ e $(4, 5, 6)$.*

I generatori dell'immagine sono i trasformati dei vettori di una base. Quindi, perché l'immagine sia generata dai vettori dati, occorre che essi facciano parte dell'insieme dei vettori trasformati. I vettori dati sono però due, mentre i trasformati dei vettori di una base di $\mathbf{R}^3$ sono tre, quindi manca un vettore: esso dovrà essere un vettore dipendente dai primi due (altrimenti l'immagine non sarebbe più generata solo dai due vettori dati), per esempio $(0,0,0)$. Quindi si pone che

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,2,3), \\ T(0,1,0) &= (4,5,6), \\ T(0,0,1) &= (0,0,0). \end{aligned}$$

La matrice associata alla applicazione lineare T rispetto alla base canonica sarà quindi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

e l'espressione della trasformazione T sarà data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4y & 2x+5y & 3x+6y \end{pmatrix},$$

quindi $T(x,y,z) = (x+4y, 2x+5y, 3x+6y)$ è una applicazione lineare la cui immagine è generata dai vettori dati dall'esercizio.